

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

ZAMP

Journal of Applied Mathematics and Physics  
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

editores: J. Ackeret E. Baumann P. Niggli P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler  
Redactor: R. Sängler

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

UTISHAUSER, H., SPEISER, A., und STIEFEL, E.: Programmgesteuerte digitale Rechengeräte (elektronische Rechenmaschinen) (II. Teil) . . . . .	339
LASER, W., und BERGMANN, O.: Über die Tragweite der Begriffe «Brennpunkte» und «Brennweite» in der Elektronenoptik und die starken Elektronenlinsen mit Newtonscher Abbildungsgleichung . . . . .	363
OTT, N.: Flügelschwingungsformen in ebener kompressibler Potentialströmung . . . . .	380

### *Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves*

BERL, W.: Zur Multiplikation reeller Zahlen . . . . .	411
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques . . . . .	413

ZAMP	Vol. I	Fasc. 6	Pag. 339-416	15. 11. 50
------	--------	---------	--------------	------------

Verlag Birkhäuser, Basel / Schweiz

AI  
37

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängcr, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmäßig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* in der Originalsprache eine kurze Zusammenfassung beigegeben werden, damit diese durch die Redaktion in eine andere der vier genannten Sprachen übersetzt werden kann. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratis-separata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical must be addressed to the editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors forego proof-reading. The contributions will be published in German, English, French or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* must be added a brief summary in the original language for translation into one of the four languages by the editor. Drawings and photographs for *illustrations* must be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; writings on the illustrations must be done with pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers* and *Brief Reports* receive 50 free copies of separate prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langue française, anglaise, allemande ou italienne; cependant chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en langue originale qui sera traduit par la rédaction dans une des quatre langues prévues. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 28.-, Ausland Fr. 34.-, Einzelnummer Fr. 6.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 28.-, foreign Fr. 34.-, single copy Fr. 6.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 28.-, étranger Fr. 34.-, le numéro Fr. 6.-

ZAMP kann in folgenden Ländern bei der Post abonniert werden:

ZAMP can be subscribed directly through any Post Office in the following countries:

ZAMP peut être abonné directement aux offices postales dans les pays suivants:

Belgien-Luxemburg	Dänemark	Schweden	Portugal	Italien
Holland	Norwegen	Finnland	Marokko	Deutschland

Inserate/Advertisements/Annonces:  $\frac{1}{4}$  Seite/page: Fr. 150.-,  $\frac{1}{2}$  Seite/page: Fr. 80.-,  $\frac{1}{8}$  Seite/page: Fr. 45.-

Alle Rechte, einschließlich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. — All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. — Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1950 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10 (Switzerland)

Printed in Switzerland



# Programmgesteuerte digitale Rechengерäte (elektronische Rechenmaschinen)

Zusammenfassender Bericht (II. Teil)

Von HEINZ RUTISHAUSER, AMBROS SPEISER und EDUARD STIEFEL<sup>1)</sup>

## *Inhaltsverzeichnis*

§ 1. Grundlagen und wissenschaftliche Bedeutung . . . . .	278
1.1 Digitale Maschinen und Analogiegeräte	
1.2 Die Programmsteuerung	
1.3 Rechengeschwindigkeit	
1.4 Beziehungen zur Logik	
1.5 Rechenautomaten und Nervensystem	
1.6 Geschichtliches	
1.7 Anwendungen	
§ 2. Organisation und Arbeitsweise . . . . .	287
2.1 Prinzipschema	
2.2 Hauptteile eines Rechenautomaten	
2.3 Befehlsgebung	
§ 3. Arithmetische Prinzipien . . . . .	340
3.1 Zahlssysteme	
3.2 Duale Verschlüsselung	
3.3 Darstellung der Zahlen in der Maschine	
3.4 Rechnen mit halblogarithmisch dargestellten Zahlen	
3.5 Rechnen mit Maschinen mit festem Komma	
3.6 Aufrunden	
3.7 Übersetzung vom Dezimal- ins Dualsystem	
§ 4. Vorbereitung von Rechenplänen . . . . .	*)
4.1 Allgemeiner Gang der Vorbereitung	
4.2 Struktur eines numerischen Problems	
4.3 Die Sprungbefehle	
4.4 Das Strukturdiagramm	
4.5 Verschiedene Arten der Befehlsgebung	
4.6 Rechnen mit Befehlen	
4.7 Beispiel einer Befehlsreihe	
4.8 Behandlung der Funktionen	
4.9 Rechenkontrollen	
§ 5. Physikalische Grundlagen	
5.1 Logische Grundsaltungen	
5.2 Das Rechenwerk	
5.3 Der Speicher	
5.4 Das Leitwerk	
5.5 Eingang und Ausgang	

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik der ETH.

\*) Vol. II, 1951.

### § 3. Arithmetische Prinzipien

#### 3.1. Zahlssysteme

Unter einem Zahlssystem versteht man allgemein die Art und Weise, eine positiv reelle Zahl durch Zeichen (Ziffern) darzustellen, d. h. zu verziffern. Dabei ist das Dezimalsystem nur ein Sonderfall ( $B = 10$ ) der allgemeineren Darstellung

$$x = \sum_{k=-\infty}^M x_k B^k, \quad (3.1)$$

wobei die ganze Zahl  $B \geq 2$  die Basis des Zahlsystems heißt und die ebenfalls ganzen Zahlen  $x_k$  ( $0 \leq x_k < B$ ) die Ziffern der Zahl  $x$  sind.

Beim praktischen Rechnen können immer nur endliche  $B$ -albrüche verwendet werden, die dann von den darzustellenden Zahlen  $x$  um gewisse Beträge  $\delta x$  abweichen; deshalb interessiert die mit einer gewissen Stellenzahl  $N$  erreichte relative Genauigkeit  $\gamma = x/\delta x$ . Da durch geeignete Abrundung immer erreicht werden kann, daß  $\delta x$  höchstens eine halbe Einheit der letzten Stelle ist und eine  $N$ -stellige  $B$ -alzahl stets mindestens  $B^{N-1}$  Einheiten der letzten Stelle beträgt, gilt  $\gamma \geq 2 B^{N-1}$ .

Um also auch in ungünstigen Fällen eine relative Genauigkeit  $\gamma_0$  zu sichern, sind

$$\frac{\log \gamma_0 / 2}{\log B} + 1 \quad (3.2)$$

wesentliche Stellen notwendig.

Währenddem nun bisher die Zahl zehn als Basis für die Verzifferung unbestritten war, kommen für den Bau programmgesteuerter Rechenmaschinen doch auch andere Zahlssysteme in Betracht. Zur Verzifferung mit der Basis  $B$  braucht es  $B$  verschiedene Ziffern ( $0, 1, \dots, B-1$ ), die in einer Rechenmaschine durch  $B$  verschiedene Zustände eines geeigneten mechanischen oder elektrischen Systems dargestellt werden können. So haben die Zählräder in den Bürorechenmaschinen 10 ausgezeichnete Stellungen, die den Ziffern 0 bis 9 zugeordnet sind.

Für eine schnelle Maschine kommen hingegen nur elektrische Schaltelemente, zum Beispiel Relais und Elektronenröhren, in Betracht, und diese haben nur zwei stabile Zustände. Somit ist für solche Maschinen das Zahlssystem mit der Basis  $B = 2$ , das sogenannte Dualsystem, bevorzugt, welches tatsächlich bei einigen fertiggestellten oder im Bau befindlichen Maschinen zur Anwendung kommt<sup>1)</sup>:

Da das Dualsystem eine rein interne Angelegenheit dieser Maschinen ist — man denkt wohl kaum daran, auch im täglichen Leben das Dezimalsystem zu

<sup>1)</sup> Vgl. die Zusammenstellung der Maschinen am Schluß von § 2, S. 291–294.



verdrängen — müssen die Ausgangswerte und Konstanten eines Problems zuerst ins Dualsystem übertragen werden, und am Ende der Rechnung hat die Rückverwandlung der Resultate ins Dezimalsystem zu erfolgen (vgl. § 3.7).

Die Vorzüge des Dualsystems sind durch die Tatsache begründet, daß man mit den beiden Ziffern 0 und L<sup>1)</sup> auskommt, jede Ziffer einer Zahl ist damit immer *entweder* 0 *oder* L. Diese Alternative entspricht nicht nur den elektrischen Schaltungen vortrefflich (geöffnetes oder geschlossenes Relais), sondern stellt auch die Brücke zum Aussagenkalkül her<sup>2)</sup> (richtig oder falsch).

Eine für die Praxis wichtige Eigenschaft ergibt sich aus Formel (3.1), vermöge der sich eine Zahl aus ihren Ziffern aufbaut: Nur beim Dualsystem ist  $x$  immer eine Summe der reinen Potenzen der Basis, z. B.  $L0L0L = 2^4 + 2^2 + 2^0 = 21$ ; bei allen andern Zahlssystemen sind die Faktoren  $x_k$  im allgemeinen größer als 1.

Ferner zeigt es sich, daß das Dualsystem im Mittel die kleinsten Quersummen ergibt, was für Multiplikation und Division von Bedeutung ist, denn die Dauer dieser Operationen ist durch die Quersumme des Multiplikators bzw. Quotienten bestimmt. Weil jede Stelle eines  $B$ -albruches im Mittel  $(B-1)/2$  zur Quersumme beiträgt und die zur Erreichung einer relativen Genauigkeit  $\gamma_0$  notwendige Stellenzahl nach (3.2) im wesentlichen  $\log \gamma_0 / \log B$  ist, folgt, daß die mittlere zu erwartende Quersumme bei festem, vorgeschriebenem  $\gamma_0$  zu  $(B-1)/\log B$  proportional ist. Dieser Ausdruck ist für  $B=2$  am kleinsten, nämlich zirka 1,44, während sich für das Dezimalsystem zirka 3,9 ergibt.

Zu den *Nachteilen* des Dualsystems muß einmal die Notwendigkeit des Übersetzens gerechnet werden, ferner ist das Ziffernbild einer Zahl wenig differenziert, weil nur die Ziffern 0 und L auftreten. Es ist deshalb nicht leicht, eine Zahl mit einem Blick zu erfassen, um so mehr, als im Dualsystem wesentlich mehr Stellen notwendig sind, um die gleiche Genauigkeit zu gewährleisten (einer 12stelligen Dezimalzahl entspricht eine 40stellige Dualzahl).

### 3.2. Duale Verschlüsselung

Da die Verwendung des reinen Dualsystems in einer Rechenmaschine viele Nachteile mit sich bringt, haben namhafte Konstrukteure am Dezimalsystem festgehalten. Um aber dennoch von den Vorteilen des Dualsystems profitieren zu können, stellen sie wenigstens die einzelnen Ziffern einer Zahl durch Dualzahlen dar. Es wird zu diesem Zweck eine Vorschrift eingeführt, welche jeder ganzen Zahl  $x$  ( $0 \leq x < 10$ ) eindeutig eine ebenfalls ganze Zahl  $t(x)$  [ $0 \leq t(x) < 16$ ] zuordnet. Diese wird als vierstellige Dualzahl geschrieben und die der Ziffer  $x$  zugeordnete *Tetrad*e genannt.

Die nächstliegende aller möglichen Vorschriften ist durch die Funktion  $t(x) \equiv x$  bestimmt (sogenannte direkte Verschlüsselung)<sup>3)</sup>. Bei dieser wird also einfach jede Ziffer ins Dualsystem übersetzt, z. B.

$$6295 \rightarrow 0LL0'00L0'L00L'0L0L.$$

<sup>1)</sup> Die Dual-Eins wird zur Unterscheidung von der Dezimal-Eins mit L bezeichnet.

<sup>2)</sup> Vgl. C. E. SHANNON [48].

<sup>3)</sup> Angewendet bei Mark II [3] und SSEC (IBM) [32].

Ferner wurde beim «Complex Computer»<sup>1)</sup>, welcher allerdings keine eigentliche programmgesteuerte Rechenmaschine ist, die sogenannte *Dreixzeß*-Verschlüsselung verwendet:  $t(x) = x + 3$ , oder

$$0 \rightarrow 00LL, \quad 1 \rightarrow 0L00, \quad 2 \rightarrow 0L0L, \quad \dots, \quad 9 \rightarrow LL00.$$

Diese zeichnet sich unter anderem dadurch aus, daß niemals alle Dualziffern einer verschlüsselten Zahl 0 oder alle L sein können, so daß sich das Versagen von elektrischen Schaltelementen sofort anzeigt.

Wir wollen uns nun sofort dem allgemeinen Fall zuwenden: Die Gesamtzahl aller möglichen Zuordnungen  $x \rightarrow t(x)$  beträgt offenbar  $16^{10}$ , worin allerdings auch die nicht eindeutig umkehrbaren inbegriffen sind. Um die Übersicht nicht zu verlieren, scheidet man aus dieser Menge durch geeignete Postulate diejenigen Funktionen  $t(x)$  aus, die zu unzumutbaren Verschlüsselungen führen würden. Diese Postulate sind nach AIKEN<sup>2)</sup>:

- A. Verschiedenen Ziffern sollen verschiedene Tetraden zugeordnet werden, d. h.  $t(x)$  soll jeden Wert höchstens einmal annehmen.
- B. Die größere Ziffer soll auch durch die größere Dualzahl dargestellt werden, d. h. aus  $x < y$  soll  $t(x) < t(y)$  folgen.
- C. Wenn sich zwei Ziffern  $x$  und  $y$  auf 9 ergänzen, sollen auch die zugeordneten Tetraden komplementär sein, also durch Vertauschung von 0 und L auseinander hervorgehen, d. h. es soll dann  $t(x) + t(y) = 15$  gelten.

Aus diesen Postulaten, denen noch 56 Verschlüsselungen genügen, folgt übrigens, daß sich die Ziffern 0 bis 4 einerseits und 5 bis 9 andererseits durch die erste Dualziffer der zugeordneten Tetraden unterscheiden; diese ist nämlich  $0 [t(x) < 8]$  für  $x < 5$  und  $L [t(x) \geq 8]$  für  $x \geq 5$ .

- D. Die geraden (bzw. ungeraden) Ziffern sollen durch gerade (bzw. ungerade) Tetraden (oder umgekehrt) dargestellt werden, so daß die letzte Dualstelle einer Tetrade die Parität der dargestellten Ziffer bestimmt.
- E. Es soll möglich sein, jeder der vier Dualstellen einer Tetrade geeignete Gewichte zuzuordnen, so daß die gewogene Quersumme der Tetrade die dargestellte Ziffer ergibt; es soll sich also  $x$  auf diese einfache Weise aus  $t(x)$  berechnen lassen. (Zum Beispiel haben die vier Dualstellen bei der anfangs erwähnten direkten Verschlüsselung die Gewichte 8, 4, 2, 1.)

Die Zahl der verschiedenen Verschlüsselungen, welche diesen fünf Axiomen genügen (die direkte Verschlüsselung verletzt das Postulat C und die Dreixzeßverschlüsselung genügt der Bedingung E nicht), beträgt noch 4, unter denen sich die Aikensche oder 2-4-2-1-Verschlüsselung durch besondere Einfachheit auszeichnet:

<sup>1)</sup> Beschreibung dieser Maschine: Bell Laboratories Record 19, Nr. 2, S. 5/6 (Oktober 1940).

<sup>2)</sup> Persönliche Mitteilung.



oder:

$$t(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{für } x < 5 \\ x + 6 & \text{für } x \geq 5 \end{array} \right\}$$

0 → 0000	5 → L0LL	}	(3.3)
1 → 000L	6 → LL00		
2 → 00L0	7 → LL0L		
3 → 00LL	8 → LLL0		
4 → 0L00	9 → LLLL		

Die Gewichte sind hier 2, 4, 2, 1; zum Beispiel ist also 7 (LL0L) = 2 + 4 + 0 + 1.

*Rechnen mit dual verschlüsselten Zahlen.* Darüber sagen die fünf Axiome gar nichts aus. Das Rechnen kann nun immer auf die Addition zurückgeführt werden<sup>1)</sup>, welche ziffernweise durchgeführt wird, so daß man sich darauf beschränken kann, die Addition von einzelnen Ziffern in Betracht zu ziehen. Da diese aber Ausschnitte aus vielstelligen Zahlen sind, müssen noch die eventuell erfolgenden Zehnerüberträge von rechts her und nach links berücksichtigt werden.

Die Aufgabe, die Summe zweier Ziffern  $x$  und  $y$  zu bilden, besteht also darin, aus den Tetraden  $t(x)$  und  $t(y)$  und dem eventuell von rechts kommenden Übertrag  $u$  (es ist  $u = 1$  oder 0, je nachdem ein solcher Übertrag erfolgt oder nicht) die folgende Tetrade zu bilden:

$$\left. \begin{array}{ll} t(x + y + u) & \text{falls } x + y + u < 10 \\ 16 + t(x + y + u - 10) & \text{falls } x + y + u \geq 10 \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

Der Summand 16 im zweiten Fall entspricht dem Zehnerübertrag, der zur nächst höheren Tetrade zu erfolgen hat und der, dual aufgefaßt, einen Wert von 16 Einheiten der betrachteten Tetrade besitzt (vgl. Fig. 2).

	Tetrade $10^{n+1}$	Tetrade $10^n$
1. Summand . . . .	× × × ×	× × × ×
2. Summand . . . .	× × × ×	× × × ×
Korrekturen <sup>2)</sup> . . . .	× × × ×	× × × ×
Summe ohne Übertrag	0 0 L L	L L 0 L L (z. B.)
	L ← $u$	
Summe mit Übertrag .	0 L 0 0	L 0 L L

Fig. 2  
Zehnerübertrag

<sup>1)</sup> Vgl. § 3.5.  
<sup>2)</sup> Vgl. weiter unten.

Man geht nun meistens so vor, daß man zunächst in einem dualen Addierwerk die Summe  $t(x) + t(y) + u$  bildet; falls dies nicht das gemäß (3.4) geforderte Resultat ergibt, hat noch eine Korrektur zu erfolgen, was je nach der gewählten Verschlüsselung mehr oder weniger kompliziert ist (vgl. auch § 5.11). Um diese Korrekturen zu bestimmen, vergleichen wir die Summe  $t(x) + t(y) + u$  (Haben) mit den Sollbeträgen von (3.4), wobei für  $t(x)$  die speziellen Funktionen eingesetzt werden:

a) *Direkte Verschlüsselung*

$$\begin{array}{ll} \text{Soll:} & x + y + u \quad \text{für} \quad x + y + u < 10 \\ & 6 + x + y + u \quad \text{für} \quad x + y + u \geq 10 \end{array} \quad \text{Haben:} \quad x + y + u.$$

Das heißt: Die Summe  $t(x) + t(y) + u$  ist richtig für  $x + y + u < 10$ , andernfalls hat man die Korrektur  $6 = 0LL0$  zu addieren (worauf dann ein Übertrag zur nächst höheren Tetrade erfolgt).

b) *Dreieck-Verschlüsselung*

$$\begin{array}{ll} \text{Soll:} & x + y + u + 3 \quad \text{für} \quad x + y + u < 10 \\ & x + y + u + 9 \quad \text{für} \quad x + y + u \geq 10 \end{array} \quad \text{Haben:} \quad x + y + u + 6.$$

Die Korrektur ist also  $-3$  im ersten,  $+3$  im zweiten Fall. Diese beiden Fälle unterscheiden sich offenbar dadurch, daß der Habenbetrag im ersten Fall  $< 16$ , im zweiten  $\geq 16$  ist, d. h. daß genau im zweiten Fall schon ohne die Korrektur ein Übertrag zur nächst höheren Tetrade erfolgt, welcher richtig ist und durch die Korrektur nicht mehr beeinflußt wird.

c) *Aiken-Verschlüsselung*

$$\begin{array}{ll} \text{Soll:} & \text{Haben:} \\ x + y + u & \text{für} \quad x + y + u < 5 \quad x + y + u \quad \text{für} \quad x, y < 5 \\ x + y + u + 6 & \text{für} \quad 5 \leq x + y + u < 15 \quad x + y + u + 6 \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} x < 5, y \geq 5 \\ x \geq 5, y < 5 \end{array} \\ x + y + u + 12 & \text{für} \quad 15 \leq x + y + u. \quad x + y + u + 12 \quad \text{für} \quad x, y \geq 5. \end{array}$$

Korrekturen sind also in folgenden Fällen notwendig:

$$\begin{array}{ll} x, y < 5, \quad x + y + u \geq 5: & \text{Korrektur} + 6, \\ x, y \geq 5, \quad x + y + u < 15: & \text{Korrektur} - 6. \end{array}$$

Interessanterweise ist die Summe  $t(x) + t(y) + u$  gerade dann korrekturbedürftig, wenn sie, von einem eventuellen Übertrag zur nächst höheren Stelle abgesehen, eine *Pseudodezimale* ist, d. h. eine der 6 nicht zur Darstellung der



10 Ziffern verwendeten vierstelligen Dualzahlen:

$$5^* = 0L0L \quad 2^* = L000$$

$$6^* = 0LL0 \quad 3^* = L00L$$

$$7^* = 0LLL \quad 4^* = L0L0$$

Wenn also die Summe  $t(x) + t(y) + u$  eine richtige Tetrade ist, so bedarf sie keiner Korrektur mehr.

*Beispiel:*

$$\begin{array}{rcl} 5 \rightarrow L0LL & & 7 \rightarrow LL0L \\ 6 \rightarrow LL00 & & 8 \rightarrow LLL0 \\ \hline L0LLL \rightarrow \text{Pseudodezimale } 7^* & & 15 \leftarrow L L0LL \rightarrow \text{richtige Dezimale } 5 \\ \quad + \text{Übertrag, also} & & \quad + \text{Übertrag, keine} \\ -0LL0 & & \text{Korrektur} \\ \hline 11 \leftarrow L000L & & \end{array}$$

Eine besondere Art der Darstellung der Ziffern (Biquinary Notation), welche den römischen Ziffern gleicht, wurde im Bell Computer<sup>1)</sup> verwendet.

### 3.3. Darstellung der Zahlen in der Maschine<sup>2)</sup>

Im folgenden soll davon abgesehen werden, daß die zehn Ziffern des Dezimalsystems durch Tetraden dargestellt werden und daß nach jeder Addition Korrekturen notwendig sind.

In jeder digitalen Rechenmaschine können die Rechengrößen nur durch *endliche* Dezimal- oder Dualbrüche dargestellt werden, und zwar ist die übliche Genauigkeit bei programmgesteuerten Rechenmaschinen zirka 12 Dezimal- oder 40 Dualstellen. Das Vorzeichen erfordert bei beiden Systemen eine Dualziffer, indem beispielsweise + als 0 und - als L geschrieben wird. Was aber die Kommastellung anbelangt, so unterscheidet man zwei Haupttypen:

A. *Maschinen mit beweglichem Komma* (floating decimal [binary] point), zu denen der Bell Computer [6], Mark II [3] und das Rechengерät von ZUSE [66] gehören und welche alle Zahlen in sogenannter *halblogarithmischer Form* darstellen:  $x = \pm p B^q$  ( $B$  = Basis des Zahlensystems). Damit ist jede Zahl durch ein Zahlenpaar vertreten, z. B. bei Mark II gemäß Fig. 3.

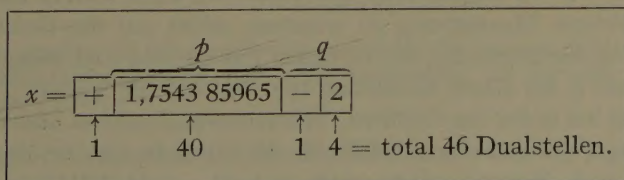


Fig. 3

Darstellung einer Zahl in Mark II.

<sup>1)</sup> Vgl. BERKELEY [12], S. 133. Im übrigen ist diese Maschine in [6] beschrieben.

<sup>2)</sup> Vgl. [16].

$q$  heißt der *Exponent* von  $x$ ; die Zahl  $p$ , die immer im Intervall  $1 \leq p < B$  liegen muß, wird gelegentlich als *Mantisse* bezeichnet (in der Tat ist ja  $q$  die Kennziffer,  $\log p$  die Mantisse von  $\log^B x$ ).

*Sonderwerte.* Da die Zahl 0 keine halblogarithmische Darstellung besitzt, muß sie durch ein besonderes Zeichen markiert werden, zum Beispiel sind bei Mark II in diesem Fall alle 46 Dualziffern = 0. Der deutsche Konstrukteur ZUSE hat außer für 0 auch für  $\infty$  sowie für die gänzlich unbestimmte Größe  $0/0$  ( $= \infty - \infty$  oder dergleichen) je ein besonderes Zeichen eingeführt. K. ZUSE, der die Zahlen in seiner Maschine durch 32 Dualziffern darstellt (24 für  $p$ , 8 für  $q$ ), fügt zu diesem Zweck noch eine weitere Dualziffer mit folgender Bedeutung bei: Wenn diese 0 ist, so bestimmen die übrigen 32 Dualziffern eine normale Zahl  $x = p B^q$ ; ist diese aber L, so liegt ein Sonderwert vor, und die übrigen 32 Dualziffern entscheiden, ob es sich um 0,  $\infty$  oder ? (Unbestimmt) handelt.

B. *Maschinen mit festem Komma* (fixed decimal [binary] point). Bei diesen werden die Zahlen ebenfalls als endliche Ziffernfolgen dargestellt, aber im Gegensatz zu den Maschinen mit beweglichem Komma ist hier dem Komma innerhalb der Zifferngruppe eine feste Position zugewiesen, nämlich bei den meisten Maschinen am Anfang der Zifferngruppe<sup>1)</sup> (so daß alle Rechengrößen im Intervall  $-1 < x < 1$  liegen müssen), während sie bei Mark I und Mark III wenigstens noch für jedes Problem wählbar ist:

Mögliche Kommastellungen bei Mark III: ,7,3,6 2,5 1,4 0 3 9 2 8 1 7 0 6,  
ebenso bei BINAC und IAS: ,00LL00LL00LL00LL00LL...

Das Vorzeichen erfordert ebenfalls eine Dualziffer, eine Angabe des Exponenten ist unnötig.

Für den Uneingeweihten scheint diese starre Behandlung des Kommas nicht nur ein schwerer Nachteil, sondern überhaupt ein unhaltbarer Zustand zu sein. Tatsächlich ist es aber so, daß man, falls die Größenordnung der in der Rechnung auftretenden Zahlen einigermaßen bekannt ist, das Problem so transformieren kann, daß dann alle in die Rechnung eingehenden Größen im Intervall  $-1 < x < 1$  liegen. Man wird dabei vor allem darauf ausgehen, eine nach oben sichere Abschätzung zu erhalten, selbst auf die Gefahr hin, daß nachher die in der Rechnung auftretenden Zahlen sehr viel kleiner als 1 sind (dafür hat man ja bei diesen Maschinen zum Teil so viele Stellen).

Außerdem hat es der das Problem Vorbereitende als *ultima ratio* in der Hand, die Rechnung so zu gestalten, daß die Skala — welche sich bei den Maschinen mit beweglichem Komma automatisch anpaßt — ebenfalls beweglich wird, vgl. [15].

<sup>1)</sup> Es scheint allerdings, daß die Stellung des Kommas zwischen der ersten und zweiten Ziffer vorteilhafter wäre, vgl. [35].



Zusammenfassend kann gesagt werden, daß zwar der Umstand, daß man bei einer Maschine mit festem Komma die Größenordnung der in der Maschine gebildeten Rechenresultate ungefähr vorausbestimmen muß, um erfolgreich damit arbeiten zu können, ein entschiedener Nachteil ist, der aber durch eine Anzahl von Vorteilen gegenüber den Maschinen mit beweglichem Komma mehr als ausgeglichen wird. Zweifellos wird man in der Weiterentwicklung versuchen, die Vorteile beider Systeme in einer Maschine zu vereinigen.

### 3.4. Rechnen mit halblogarithmisch dargestellten Zahlen

Es soll hier kurz erklärt werden, welche arithmetischen Probleme die vier Grundoperationen in einer Maschine mit beweglichem Komma aufwerfen. Betreffs schaltungstechnischer Probleme vergleiche man die sehr ausführliche Beschreibung von Mark II [3].

#### Addition und Subtraktion

Zunächst ist klar, daß nur Zahlen mit gleichen Exponenten addiert werden können. Deshalb muß man zuerst die Differenz der Exponenten bilden und dann den Summanden mit dem kleineren Exponenten um eine gewisse Anzahl Stellen nach rechts verschieben, zum Beispiel bei einer dreistellig dezimalen Maschine:

$$\begin{array}{r} \text{a) } 5,32 \times 10^{-4} \rightarrow 0,05 \times 10^{-2} \\ 4,73 \times 10^{-2} \rightarrow 4,73 \times 10^{-2} \end{array}$$

Korrekte halblogarithmische Summe  $\underline{4,78 \times 10^{-2}}$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 9,82 \times 10^2 \rightarrow 9,82 \times 10^2 \\ 7,52 \times 10^1 \rightarrow 0,75 \times 10^2 \\ \hline 10,57 \times 10^2 \end{array}$$

Die Mantisse ist hier größer als  $B = 10$ , deshalb hat ein *Ausrichten* der Summe zu erfolgen, deren halblogarithmische Darstellung lautet:  $\mathbf{1,06 \times 10^3}$ .

$$\begin{array}{r} \text{c) } \quad \quad - 5,55 \times 10^1 \\ \quad \quad + 5,53 \times 10^1 \\ \hline \quad \quad - 0,02 \times 10^1 \end{array}$$

Auch hier genügt die Mantisse nicht mehr der Bedingung  $1 \leq p < B$ , es ist jetzt eine Stellenverschiebung nach links notwendig, die korrekte Darstellung wird so:  $\mathbf{-2,00 \times 10^{-1}}$ .

Im Beispiel c erscheinen infolge der Stellenverschiebung nach links am Ende eine Anzahl von Nullen, welche eine nicht vorhandene Genauigkeit vortäuschen. Es ist dies ein Nachteil der Maschinen mit beweglichem Komma, daß sie den beim Subtrahieren fast gleich großer Zahlen auftretenden Genauigkeitsverlust nicht erkennen.

### *Multiplizieren und Dividieren*

Für diese beiden Operationen addiert bzw. subtrahiert man die Exponenten und multipliziert bzw. dividiert die Mantissen.

Nun kann aber das so erhaltene Mantissenprodukt eine Zahl zwischen 1 und  $B^2$  sein, so daß eventuell eine Rechtsverschiebung derselben und gleichzeitig eine Erhöhung des Exponenten nötig ist. Entsprechend kann der Mantissenquotient zwischen  $B^{-1}$  und  $B$  liegen und verlangt also eventuell nach einer Linksverschiebung mit Verminderung des Exponenten. Im Detail werden diese beiden Operationen ähnlich ausgeführt wie bei den Maschinen mit festem Komma, für welche sie ausführlich beschrieben sind (vgl. §§ 3.52 und 3.53).

Wie man sieht, hat die halblogarithmische Darstellung der Zahlen in einer Rechenmaschine den Nachteil, daß Addition und Subtraktion, welches bei weitem die häufigsten Operationen sind, verhältnismäßig kompliziert werden.

### *Rechnen mit Sonderwerten*

Der Exponent in der halblogarithmischen Darstellung einer Zahl kann nur in gewissen Grenzen variieren (z. B. von  $-15$  bis  $+15$  bei Mark II), so daß die Größenordnung der in der Maschine vorkommenden Rechengrößen auch nicht ganz unbeschränkt ist. Es kann nun vorkommen, daß bei der Ausführung der Rechnung Zahlen entstehen, deren Exponenten die erwähnten Grenzen überschreiten, d. h. der Exponent überfließt<sup>1)</sup>. In einem solchen Fall muß eine Rechenmaschine normalerweise anhalten, da sonst falsche Resultate entstehen. Das Rechenggerät von K. ZUSE bildet hingegen einen Sonderwert «sehr groß» und rechnet mit diesem weiter, solange dies auf eindeutige Weise möglich ist. Erst wenn Operationen wie  $0 \cdot \infty$  und  $\infty - \infty$  zu unbestimmten Resultaten führen, kommt es zum Unterbruch der Rechnung. Das unvorhergesehene Anhalten der Maschine wird dadurch nicht nur verzögert, sondern in vielen Fällen überhaupt verhindert. Zum Beispiel kommt es beim Auswerten von Kettenbrüchen vor, daß ein Teilnenner  $\infty$  oder sehr groß wird. Da diese Größe aber in einem Nenner steht, ist sie völlig unschädlich; tatsächlich wird auch das Rechenggerät von ZUSE in einem solchen Fall (im Gegensatz zu andern Maschinen) nicht anhalten, sondern *vorübergehend* den Sonderwert  $\infty$  oder «sehr groß» bilden.

### *3.5. Rechnen mit Maschinen mit festem Komma<sup>2)</sup>*

Es wird im folgenden immer angenommen, daß in einer solchen Maschine das Komma so gesetzt sei, daß alle Zahlen zwischen  $-1$  und  $+1$  (Grenzen aus-

<sup>1)</sup> *Überfließen* heißt: Die höchste Stelle des betreffenden Zählwerks springt von  $B-1$  auf 0 und der resultierende Übertrag geht verloren (wie es auch bei Bürorechenmaschinen beobachtet werden kann). Es resultiert also ein Fehler von  $B$  Einheiten der höchsten Stelle.

<sup>2)</sup> Vgl. hierüber auch BURKS, GOLDSTINE und v. NEUMANN [20], § 5, sowie A. W. BURKS (Lecture 8 in [39]).



geschlossen) liegen, d. h. sie treten als Ziffernfolgen fester Stellenzahl  $N$  auf, bei denen das Komma stets vor der ersten Stelle zu denken ist, zum Beispiel

$$3141592653 \cong \frac{\pi}{10} \text{ mit } N = 10.$$

Wenn auch bei Mark I und Mark III die Kommastellung innerhalb oder am Ende der Ziffernfolge gewählt werden kann, so ist dies nur eine Rechenerleichterung und ändert das Prinzip nicht.

### 3.51. Addition und Subtraktion, Komplementbildung

Vor Beginn jeder Rechenoperation befinden sich die beiden Operanden (Augend und Addend oder Minuend und Subtrahend) im Speicherwerk der Maschine. Da sie selbst noch mit Vorzeichen versehen sind, kann erst nach dem Ablesen derselben entschieden werden, ob effektiv eine Addition oder Subtraktion auszuführen ist. Diese Entscheidung wird dadurch vereinfacht, daß man Addition und Subtraktion gleichwertig als *Addition* von Zahlen behandelt, von denen eine oder beide negativ sein können, und außerdem negative Summanden im Rechenwerk nicht als Absolutbetrag mit Vorzeichen, sondern als Komplemente (*konegative Gestalt*) darstellt:

Zu jeder negativen Zahl  $x$ , die ins Rechenwerk eingeht, wird automatisch eine Konstante  $C$  addiert, die Summe  $\bar{x} = x + C$  heißt dann das *Komplement* von  $x$ . Wenn diese Konstante  $C \geq 2 - \eta$  ist (wobei  $\eta = B^{-N}$  eine Einheit der letzten Stelle bedeutet), so ist wegen  $x > -1$ , genauer  $x \geq -1 + \eta$  offenbar  $\bar{x} \geq 1$ .

Somit besteht dann eine eindeutige Unterscheidung zwischen den positiven Zahlen und den in komplementärer Form dargestellten negativen Zahlen; diese sind unechte, jene echte Dezimal- oder Dualbrüche. Diese Unterscheidung ist natürlich unerläßlich, so daß nur Konstanten  $C \geq 2 - \eta$  brauchbar sind. Da also die im Rechenwerk auftretenden konegativen Zahlen (negative Zahlen in komplementärer Form)  $\geq 1$  sind, muß dieses noch mit einer *zusätzlichen Stelle* vor dem Komma (Einer) versehen sein.

Wird außerdem für positive Zahlen  $\bar{x} = x$  gesetzt, so ist immer  $\bar{x} \equiv x \pmod{C}$ , damit auch  $\bar{x} + \bar{y} \equiv x + y \pmod{C}$ . Um also die richtige Darstellung für  $\bar{x} + \bar{y}$  zu erhalten, müssen  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  addiert und die Summe mod  $C$  ins Intervall  $0 \leq x < C$  oder  $0 < x \leq C^1$ ) reduziert werden. Damit ist das Problem der allgemeinen Addition offenbar gelöst.

Von den vielen möglichen Werten für  $C$  sind eigentlich nur zwei wesentlich verschiedene im Gebrauch, nämlich  $B$  und  $B - \eta$ , und man unterscheidet demgemäß auch zwei Arten von Komplementen, nämlich die  $B$ - und die  $(B - 1)$ -Komplemente:

<sup>1</sup>) Die erste Ungleichung entspricht dem Fall, daß 0 als positive Zahl dargestellt wird, so daß  $\bar{0} = 0$  ist, während die zweite Ungleichung in Kraft tritt, wenn 0 als negative Zahl behandelt wird, wobei dann  $\bar{0} = C$  wird.

Bei den  $B$ -Komplementen ( $C = B$ ) wird die Null immer als positive Zahl aufgefaßt. Das Rechnen mod  $B$  wird dadurch realisiert, daß der Übertrag von der höchsten Stelle (Einer), der ja ins Leere geht, unterschlagen wird; damit bleiben alle Zahlen automatisch im Intervall  $0 \leq x < B = C$ .

Beispiel: (Dezimal):

$$\begin{array}{rcl}
 +,6857 & \rightarrow & 0,6857 \\
 -,3928 & \rightarrow & 9,6072 \\
 \hline
 \text{fällt weg} \leftarrow \textcircled{1} 0,2929 & & \text{fällt weg} \leftarrow \textcircled{1} 9,2223 \\
 \text{also } x + y = 0,2929 & & \text{also } \bar{x} + \bar{y} = 9,2223 \\
 & & x + y = -0,7777
 \end{array}$$

Bei den  $(B-1)$ -Komplementen ist  $C = B - 1$ , die Null wird dann zweckmäßig als negative Zahl betrachtet und folglich durch  $B - 1$  (alle Ziffern sind  $B - 1$ ) dargestellt. Das Rechnen mod  $B - 1$  wird so realisiert, daß man den von der höchsten Stelle (Einer) ausgehenden Übertrag, der den Wert  $B$  hat, der letzten Stelle, deren Einheit den Wert  $1$  hat, zuführt. Dies ist der sogenannte *Endübertrag* (end around-carry), er entspricht offenbar einer Subtraktion von  $B - 1$ .

Beispiele ( $B = 10$ ,  $N = 4$ ):

$$\begin{array}{rcl}
 +,6857 & \rightarrow & 0,6857 \\
 -,3928 & \rightarrow & 9,6071 \\
 \hline
 \text{Endübertrag} \leftarrow \textcircled{1} 0,2928 & & \text{Endübertrag} \leftarrow \textcircled{1} 9,2221 \\
 \rightarrow 1 & & \rightarrow 1 \\
 \hline
 \text{Summe} & 0,2929 & \bar{x} + \bar{y} = 9,2222
 \end{array}$$

Die Zuteilung der Null zu den negativen Zahlen bei Maschinen mit  $(B-1)$ -Komplementen hat folgenden Grund:

Eine Summe von positiven Zahlen (auch konegative Zahlen sind ja positiv) kann nie 0 sein, so daß die Null als Rechenresultat im allgemeinen zunächst als  $C$  und nicht als 0 erscheint. Da aber bei  $C = B - 1$  der Endübertrag ausbleibt, erfolgt keine Reduktion mod  $C$  auf 0, sondern die Null bleibt als  $0 = B - 1$  im Rechenwerk und trägt damit alle Merkmale einer negativen Zahl.

### Komplementbildung

Wenn eine negative Zahl aus dem Speicherwerk als Summand ins Rechenwerk übergeführt wird, so muß eine Komplementbildung erfolgen, und wenn man eine negative Summe speichern will, so muß wieder der Absolutbetrag mit Vorzeichen gebildet werden, wozu eine neue Komplementbildung erforderlich ist<sup>1)</sup>. Es ist deshalb außerordentlich wichtig, eine einfache Regel für die Komplementbildung zu haben.

<sup>1)</sup> Einige Maschinen, nämlich Mark I [1] und IAS [20], verwenden allerdings die konegative Form der negativen Zahlen auch im Speicherwerk, was dann aber Multiplikation und Division kompliziert.



Wie man sich leicht uberzeugt, erhalt man das  $(B - 1)$ -Komplement einer negativen Zahl einfach dadurch, daB man alle Ziffern ihres Absolutbetrages zu  $B - 1$  erganzt. Im Dualsystem ist dies besonders einfach: Jede 0 ist durch 1 und jede 1 durch 0 zu ersetzen, was auch technisch sehr leicht durchzufuhren ist. Falls aber die Verschlusselung der 10 Ziffern des Dezimalsystems geeignet gewahlt wird, genieBt man dieselben Vorteile auch in diesem (vgl. Postulat C, § 3.2).

Um hingegen die  $B$ -Komplemente zu bilden, ist eine richtige Rechenoperation erforderlich; man kann namlich zunachst das  $(B - 1)$ -Komplement bilden und dann in der letzten Stelle eine 1 addieren. Obgleich dies eine sehr einfache Addition ist, muB doch damit gerechnet werden, daB sie eine ganze Reihe von Ubertragen auslost, weshalb die  $B$ -Komplementbildung wesentlich mehr Aufwand erfordert.

3.52. Multiplikation

Wenn negative Zahlen als Absolutbetrag mit Vorzeichen im Speicherwerk sind<sup>1)</sup>, so werden Multiplikator (MP) und Multiplikand (MC) dem Rechenwerk in folgender Form zugefuhrt:

MP:  $x = \pm \sum_1^N x_k B^{-k}$ ; MC:  $y = \pm \sum_1^N y_k B^{-k}$ .

Dabei konnen die  $x_k$  und  $y_k$ , die Ziffern der beiden Faktoren, nur die Werte 0, 1, ...,  $B - 1$  annehmen. Die Vorzeichen der beiden Faktoren werden im folgenden immer auBer Betracht gelassen, weil die Maschine nur die Absolutbetrage multipliziert und nachher noch das Vorzeichen des Produkts bestimmt.

Die eigentliche Multiplikation wird nun so ausgefuhrt, daB jede Stelle des Multiplikators mit dem *ganzen* Multiplikanden multipliziert und das Ganze summiert wird, d. h. man bildet:

$xy = \sum_1^N x_k y B^{-k}$ .

Die durch ein Beispiel ( $B = 10, N = 4$ ) angedeutete altbekannte Methode:

$$\begin{array}{r} ,1111 \times ,9999 = ,09999 \\ \phantom{,1111 \times } 9999 \\ \phantom{,1111 \times } 9999 \\ \phantom{,1111 \times } 9999 \\ \hline ,11108889 \end{array}$$

ist in programmgesteuerten Rechenmaschinen, die mit Relais oder Elektronen-

<sup>1)</sup> Wenn die negativen Zahlen auch in komplementarer Form gespeichert werden, so mussen erst - wie bei Mark I - die Absolutbetrage gebildet werden, oder man kann auch direkt mit den eventuellen konegativen Zahlen zur Produktbildung schreiten. Hieruber Naheres in [20], Abschnitt 5.10 und 5.11, S. 16ff.

röhren arbeiten, unökonomisch, weil es ein  $(2N)$ -stelliges Addierwerk braucht, um das Produkt zu bilden, während das in dieser Hinsicht sparsamere, ebenfalls wohl-bekannte Verfahren der abgekürzten Multiplikation zu anderen Unzulänglich-keiten führt<sup>1)</sup>).

Hingegen kann man bei Anwendung des nachstehend beschriebenen Algo-rithmus [Formel (3.5)] mit einem  $N+1$ -stelligen Addierwerk  $AC^2)$  und einem  $N$ -stelligen Register  $MR$  auskommen (das Register  $MR$  muß nicht addieren können und ist deshalb konstruktiv wesentlich einfacher als  $AC$ ):

$$\left. \begin{aligned} p_N &= 0 \text{ (AC wird vor Beginn der Multiplikation gelöscht)} \\ p_{k-1} &= \frac{1}{B} (p_k + x_k y) \quad \text{für } k = N, N-1, \dots, 1 \\ xy &= p_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Realisiert wird dies dadurch, daß man die Stellen  $B^0, B^{-1}, \dots, B^{-N}$  von  $p_k$  ( $k = N, \dots, 0$ ) im Akkumulator  $AC$  und die Stellen  $B^{-N-1}, \dots, B^{-2N}$  im Register  $MR$  aufbewahrt. Die Bildung von  $p_{k-1} = B^{-1} (p_k + x_k y)$  erfordert dann, daß zunächst zu  $p_k$  ein ganzes Vielfaches von  $y$ , welches auch ein ganzes Vielfaches von  $\eta = B^{-N}$  ist, addiert wird. Dieser Vorgang spielt sich allein in  $AC$  ab und bewirkt keinerlei Änderungen in  $MR$ . Alsdann hat noch eine Multi-plikation mit  $B^{-1}$ , das heißt eine Verschiebung um eine Stelle nach rechts, und zwar *gemeinsam in  $AC$  und  $MR$* , zu erfolgen; die letzte Stelle von  $AC$  wird dabei zur höchsten in  $MR$ .

Wir zeigen diesen Vorgang am Beispiel  $x \times y = ,2345 \times ,6789$ :

	AC	MR	(MR)
$p_4$	00000	****	(2345)
$p_4 + 5y = 10 p_3$	33945	****	(2345)
$p_3$	03394	5***	(5234)
$p_3 + 4y = 10 p_2$	30550	5***	(5234)
$p_2$	03055	05**	(0523)
$p_2 + 3y = 10 p_1$	23422	05**	(0523)
$p_1$	02342	205*	(2052)
$p_1 + 2y = 10 p_0$	15920	205*	(2052)
$p_0 = xy =$	01592	0205	(0205)

Wie man sieht, sind die mit einem Stern markierten Stellen in  $MR$  für das Ergebnis belanglos, da sie infolge der fortlaufenden Rechtsverschiebungen all-mählich eliminiert werden. Man kann deshalb am Anfang der Multiplikation die  $N$  Stellen des Multiplikators in  $MR$  speichern und hat dann die für die Be-rechnung von  $p_{k-1}$  benötigte Ziffer  $x_k$  des Multiplikators immer genau in der letzten Stelle von  $MR$  zur Verfügung. Was das Register unter diesen Umständen enthält, ist in der obigen Tabelle rechts außen in Klammern angegeben.

<sup>1)</sup> Das Rechnen mit größerer Genauigkeit (§ 3.55) ist unmöglich.

<sup>2)</sup> Dieses wird natürlich auch für die in § 3.51 behandelte Addition verwendet.



Nach ausgeführter Multiplikation steht in den beiden Registern AC und MR das  $(2N)$ -stellige Produkt der beiden  $N$ -stelligen Faktoren zur Verfügung, nämlich die ersten  $N$  (sogenannte *wesentliche*) Stellen in AC, die letzten  $N$  (sogenannte *unwesentliche*) Stellen in MR. Normalerweise werden nur die wesentlichen Stellen des Produkts verwendet (dieses wird also auf  $N$  Stellen abgerundet, vgl. § 3.6), denn sämtliche  $N$  unwesentlichen Stellen sind als ungenau zu betrachten, wenn die beiden Faktoren mit Fehlern der Größenordnung  $\eta$  behaftet sind; sie werden jedoch für das Rechnen mit höherer Genauigkeit (§ 3.55) aktuell.

Die besprochene Methode [Formel (3.5)] ist prinzipiell für alle Zahlssysteme brauchbar. Aber beim Dualsystem wird sie besonders einfach, was einer der Vorzüge desselben ist. Die Operation

$$\frac{1}{2} (p_k + x_k y) = p_{k-1}$$

in (3.5) reduziert sich dann auf<sup>1)</sup>

$$2 p_{k-1} = \left\{ \begin{array}{ll} p_k & \text{für } x_k = 0 \\ p_k + y & \text{für } x_k = L \end{array} \quad (k = N, \dots, 1) \right\} \quad (3.6)$$

Beim Dezimalsystem (und auch bei allen andern Zahlssystemen mit  $B > 2$ ) ist dagegen  $x_k y$  im allgemeinen eine wenn auch einfache Multiplikation, die auf verschiedene Arten ausgeführt werden kann:

- Durch fortlaufende Aufsummierung von  $y$  wie bei den Bürorechenmaschinen (Bell-Computer). Man kann die Arbeit dadurch etwas abkürzen, daß man für  $x_k \geq 5$  von 10 an abwärts zählt; dies wird insbesondere beim Bell-Computer so gemacht.
- Man bildet zuerst nach a die Vielfachen  $2y, 3y, 4y, \dots$  bis  $9y$  und speichert diese in geeigneten Registern. Dann erst beginnt die Multiplikation gemäß (3.5), wobei diese Vielfachen verwendet werden (Mark I).
- Man bildet nur die Vielfachen  $2y, 4y, 5y$ , aus denen man zusammen mit  $y$  in allen Fällen  $x_k y$  durch höchstens eine Addition erhält (Mark II).
- Durch die Methode der Links- und Rechtskomponenten<sup>2)</sup> (SSEC, Mark III und Lochkartenmaschinen):

Die Zahl  $x_k y = \sum_1^N x_k y_j B^{-j}$  wird in zwei Summanden zerlegt, indem man jedes der Elementarprodukte  $x_k y_j$  wie folgt aufspaltet:

$$x_k y_j = B u_{kj} + v_{kj}, \quad \text{mit } 0 \leq u, v < B.$$

<sup>1)</sup> Vgl. insbesondere BURKS, GOLDSTINE und NEUMANN [20].

<sup>2)</sup> Vgl. *Manual of Mark III* [4].

Dadurch wird nun:

$$x_k y = B \sum_1^N u_{kj} B^{-j} + \sum_1^N v_{kj} B^{-j} = B L(x_k y) + R(x_k y)$$

(zum Beispiel ist für  $x_k = 7$ ;  $y = ,7385$ :  $L = ,4253$ ;  $R = ,9165$ ). Die Links- und Rechtskomponenten aller Elementarprodukte

$$[0 \times 0 \text{ bis } (B - 1) \times (B - 1)]$$

müssen in einer solchen Maschine natürlich für immer gespeichert werden<sup>1)</sup>.

*Gegenüberstellung* der vier Methoden zur Bildung von  $x_k y$ : Die Anzahl der Additionen zur Ausführung der Multiplikation  $N$ -stelliger Zahlen beträgt im Dezimalsystem im *Mittel*:

$$\begin{aligned} \text{im Falle a: } & 4\frac{1}{2} N \\ & \text{b: } 8 + N \\ & \text{c: } 2 N + 2 \\ & \text{d: } 2 N . \end{aligned}$$

Ferner beträgt die entsprechende Vergleichszahl im Dualsystem [Multiplikation gemäß Formel (3.6)]:  $1,66 N$ , weil im Dualsystem zur Erreichung derselben Genauigkeit gemäß § 3.1 zirka 3,32mal so viele Stellen notwendig sind wie im Dezimalsystem.

### 3.53. Division und Quadratwurzel

Während Addition, Subtraktion und Multiplikation Standardoperationen sind, die in keiner vernünftigen Rechenmaschine fehlen dürfen, können nicht alle programmgesteuerten Rechenmaschinen dividieren; zum Beispiel bilden Mark II, EDSAC und Mark III den Quotienten nicht auf die übliche Weise, sondern durch Multiplikation des Zählers mit dem auf andere Weise erhaltenen reziproken Wert des Nenners<sup>2)</sup>. Die Quadratwurzel wird sogar nur von wenigen Maschinen (ENIAC, Bell Computer, Rechengerät von ZUSE) nach dem bekannten elementaren Verfahren gezogen, die übrigen berechnen sie durch Auflösen der Gleichung  $x^2 = a$  nach dem Newtonschen Verfahren (§ 4.8).

*Division.* Sei  $y$  der Absolutbetrag des Nenners,  $z$  derjenige des Zählers. Da nun die Maschine nur mit Zahlen rechnen kann, deren Absolutbetrag kleiner als 1 ist, muß die Nebenbedingung  $y > z$  erfüllt sein.

Die zweckmäßigste Art zu dividieren ist die Umkehrung der in § 3.52 dargestellten Methode der Multiplikation:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= z, \\ p_k &= B p_{k-1} - x_k y \quad (k = 1, \dots, N), \\ p_N &= B^N\text{-facher Rest der Division.} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

<sup>1)</sup> Vgl. hierüber § 5.14.

<sup>2)</sup> Vgl. *Description of a Relay Calculator* [3], *Manual of Mark III* [4] sowie § 4.8 dieser Arbeit.



Dabei soll  $x_k$  die größte ganze Zahl mit der Eigenschaft sein, daß noch  $p_k \geq 0$  ist, dann ist  $0, x_1 x_2 x_3 \dots x_N$  der ohne Rücksicht auf die noch folgenden Stellen auf  $N$  Stellen abgerundete Absolutbetrag des Quotienten.

Realisiert wird der Algorithmus (3.7) dadurch, daß man zunächst  $p_0$  nach AC bringt, eine Stelle nach links schiebt und dann so oft  $y$  subtrahiert, bis in AC eine negative Zahl erscheint. Wenn dies geschieht, wird einmal  $y$  addiert, um  $p_1$  positiv zu machen (Wiederherstellung des positiven Restes). Dann verschiebt man eine Stelle nach links und subtrahiert wieder  $y$  usw.

Im folgenden Beispiel ist die dreistellige Division  $0,352:0,546$  ausgeführt:

	AC	MC	(MC)
$p_0$	0 352	000	(000)
$10 p_0$ ( $x_1 = 6$ )	3 520	000	(000)
$p_1$	0 244	000	(006)
$10 p_1$ ( $x_2 = 4$ )	2 440	000	(060)
$p_2$	0 256	000	(064)
$10 p_2$ ( $x_3 = 4$ )	2 560	000	(640)
$p_3$	0 376	000	(644)

Also ist 0,644 der abgerundete Quotient und 0,000376 der Rest. Da das Register MR hierbei unbenutzt bleibt, kann man es zur Aufnahme der fortlaufend gebildeten Ziffern  $x_k$  des Quotienten benutzen, was rechts nebenstehend in Klammern ausgeführt ist (vgl. den entsprechenden Kunstgriff bei der Multiplikation, § 3.52).

Dieses Verfahren bewährt sich gut bei Maschinen, welche negative Zahlen als  $B$ -Komplemente behandeln, aber mit  $(B-1)$ -Komplementen ist es besser, die Formeln (3.7) dahin abzuändern, daß man  $y$  und  $z$  durch  $-y$  und  $-z$  ersetzt, so daß dann  $x_k$  die größte Zahl mit der Eigenschaft ist, daß  $p_k \leq 0$  ist<sup>1)</sup>.

Im übrigen kann die Methode natürlich für jedes Zahlssystem Verwendung finden, aber im Dualsystem läßt sich eine erhebliche Vereinfachung erzielen:

*Division ohne Rückstellung des Restes im Dualsystem [20], [67]*  
(Non restoring division)

Der Algorithmus

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= z, \\ p_k &= 2 p_{k-1} - y \operatorname{sgn} (p_{k-1}) \\ 2 x_k &= 1 + \operatorname{sgn} (p_k) \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, N \quad (3.8)$$

liefert den gesuchten Quotienten  $z:y$  als  $0, x_1 x_2 \dots x_N$  im Dualsystem, wobei die Reste  $p_k$  im Gegensatz zu (3.7) beliebiges Vorzeichen haben können.

Es gilt nämlich, wie man durch vollständige Induktion zeigen kann:

$$p_k = 2^k \left[ z - \left( \sum_{j=1}^k x_j 2^{-j} \right) y \right] - (1 - x_k) y,$$

<sup>1)</sup> Vgl. A. SPEISER, *Entwurf eines elektrischen Rechengertes*, Dissertation ETH. (Zürich 1950).

woraus weiter folgt:

$$\left| z - \left( \sum_1^N x_k 2^{-k} \right) y \right| = 2^{-N} | p_N + (1 - x_N) y | \leq 2^{-N},$$

denn entweder ist  $p_N \geq 0$ , damit nach (3.8)  $x_N = 1$ , oder dann haben die beiden Glieder  $p_N$  und  $(1 - x_N) y$  ungleiches Vorzeichen.

Die Division ohne Rückstellung des Restes kann im Prinzip auch auf das Dezimalsystem übertragen werden, bringt dort aber keine wesentlichen Vorteile.

*Quadratwurzel.* Da die bekannte elementare Methode des Quadratwurzelziehens nur eine Division mit variablem Divisor ist, kann man sie sehr wohl auf programmgesteuerte Rechenautomaten übertragen. Ein wirklich schönes Verfahren erhält man aber nur im Dualsystem, wenn man auf die Rückstellung des Restes verzichtet<sup>1)</sup>, der Algorithmus, welcher die verzifferte Quadratwurzel  $0, x_1 x_2 \dots x_N$  von  $z$  liefert, lautet dann:

$$\begin{aligned} p_0 &= z, & x_0 &= 0, \\ p_k &= 2 \left[ p_{k-1} - \operatorname{sgn} (p_{k-1}) \left( 2^{-k} + \sum_1^{k-1} x_j 2^{-j} \right) + 2^{-k-1} \right], \\ 2 x_k &= 1 + \operatorname{sgn} (p_k). \end{aligned} \quad (3.9)$$

*Beweis:* Wir zeigen vorerst, daß für  $k > 0$

$$p_k = 2^k \left[ z - \left( 2^{-k} + \sum_1^{k-1} x_j 2^{-j} \right)^2 \right], \quad (3.10)$$

was zunächst für  $k = 1$  richtig ist, da wegen  $z > 0$  immer  $p_1 = 2z - 1/2$  ist.

Ferner folgt mit der Annahme  $p_{k-1} = 2^{k-1} \left[ z - \left( 2^{-k+1} + \sum_1^{k-2} x_j 2^{-j} \right)^2 \right]$  aus (3.9):

$$p_k = 2^k \left[ z - \left( 2^{-k+1} + \sum_1^{k-2} x_j 2^{-j} \right)^2 \right] + 2^{-k} - 2 \operatorname{sgn} (p_{k-1}) \left\{ 2^{-k} + \sum_1^{k-1} x_j 2^{-j} \right\}.$$

In beiden Fällen:  $p_{k-1} \geq 0$  ( $x_{k-1} = L$ ) und  $p_{k-1} < 0$  ( $x_{k-1} = 0$ ) kann man diesen Ausdruck vereinfachen und zeigen, daß er mit (3.10) übereinstimmt. Damit ist (3.10) richtig, und man kann daraus ablesen, daß

$$\left| z - \left( \sum_1^N x_k 2^{-k} \right)^2 \right| < 3 \cdot 2^{-N}, \quad \text{w.z.b.w.}$$

### 3.54. Skalarfaktoren

Beim Rechnen mit einer Maschine mit festem Komma müssen alle in der Maschine auftretenden Zahlen im Intervall  $-1 < x < 1$  gehalten werden, was nicht leicht ist, da ja Addition und Division aus diesem Bereich herausführen. Das Überschreiten oder Erreichen dieser Grenzen beim Addieren nennt man das *Überfließen* des Addierwerks AC. Zwar hat letzteres eine Einerstelle, so daß die Summe in AC noch korrekt gebildet wird, aber beim Speichern entstehen Fehler, weil die Speicherzellen diese Einerstelle nicht haben. Obwohl die

<sup>1)</sup> Diese Methode stammt von K. ZUSE [67].

meisten Maschinen in einem solchen Falle Alarm geben, muß das Überfließen des Addierwerks unter allen Umständen verhindert werden (durch sorgfältige Vorbereitung des Problems), weil die Untersuchung der Situation und die Behebung des Übelstandes sehr zeitraubend sind:

Wie schon erwähnt, muß ein numerisches Problem eventuell zuerst einer Transformation unterworfen werden, damit alle Rechengrößen — die zunächst noch ganz unbekannt sind — ins Intervall  $-1 < x < 1$  zu liegen kommen, das heißt, man gibt eine Zahl  $x$  als  $x^* = B^{-m} x$  in die Maschine ein, wobei  $m$  eine durch Abschätzung erhaltene ganze Zahl mit der Eigenschaft  $|x| < B^m$  ist<sup>1)</sup>. Es empfiehlt sich aber als Sicherheitsmaßnahme, den Exponenten  $m$  etwas größer zu wählen, als unbedingt notwendig erscheint.

Die in einem Problem auftretenden Zahlen können nun in Klassen von solchen, die mit dem gleichen Skalarfaktor  $B^{-m}$  ins Intervall  $(-1, 1)$  reduziert worden sind, eingeteilt werden. Es ist dabei in den meisten Fällen möglich, die Klasseneinteilung durch die den Rechengrößen in der physikalischen Formulierung des Problems anhaftenden Maßeinheiten und Dimensionen vorzunehmen. Es müssen dann kaum jemals Größen verschiedener Klassen addiert werden, so daß die Addition keine Probleme aufwirft (andernfalls hätte man mit ähnlichen Komplikationen zu rechnen wie bei Maschinen mit beweglichem Komma).

Bei Multiplikation und Division sind jedoch Stellenverschiebungen die Regel:

Es sollen  $z = xy$  und  $w = x/y$  gebildet werden, wobei die vier Größen  $x, y, z, w$  bzw. als  $x^* = B^{-p} x, y^* = B^{-q} y, z^* = B^{-r} z$  und  $w^* = B^{-s} w$  in der Maschine seien. Dann ist:

$$z^* = B^{-r} xy = B^{-r} B^p B^q (x^* y^*) = B^{p+q-r} (x^* y^*),$$

$$w^* = B^{-s} \left( \frac{x}{y} \right) = B^{-s} B^p B^{-q} \left( \frac{x^*}{y^*} \right) = B^{p-q-s} \left( \frac{x^*}{y^*} \right), \text{ also:}$$

Nach jeder Multiplikation ist noch eine Verschiebung des Produkts um  $p + q - r$  Stellen nach links notwendig<sup>2)</sup>, ebenso nach jeder Division eine Verschiebung um  $p - q - s$  Stellen nach links.

Dabei sind  $p, q, r, s$  die Exponenten der Klassen, denen  $x, y, z, w$  angehören.

### 3.55. Rechnen mit höherer Genauigkeit<sup>3)</sup>

Die programmgesteuerten Rechenmaschinen, soweit sie mit festem Komma arbeiten, können trotz ihrer begrenzten Stellenzahl mit beliebig großer Genauigkeit rechnen, sofern man den Mehraufwand in Kauf zu nehmen gewillt ist. Als extremes Beispiel sei erwähnt, daß die Zahlen  $e$  und  $\pi$  auf der zehnstelligen

<sup>1)</sup> Zahlen, die ihrer Natur nach ganz sein müssen, versteht man zweckmäßig mit dem Skalarfaktor  $\eta = B^{-N}$ ; dies läuft darauf hinaus, daß man sich in diesen speziellen Fällen das Komma in der Maschine hinter der letzten Ziffer denkt.

<sup>2)</sup> Unter einer Linksverschiebung um  $-n$  Stellen ist natürlich eine Rechtsverschiebung um  $n$  Stellen zu verstehen. Außerdem sind Stellenverschiebungen immer von der in § 3.52 beschriebenen Art, d. h. gleichzeitig in AC und MR.

<sup>3)</sup> Vgl. [15] und [24], Bd. 1, § 9.8 ff.



ENIAC in zirka 80 Stunden auf je 2000 Dezimalen genau berechnet worden sind [46].

Das Rechnen mit  $(nN)$ -stelligen Zahlen auf einer  $N$ -stelligen Maschine verläuft nun nach folgendem Prinzip: Die zur Basis  $B$  verschlüsselte Zahl  $x = \sum_1^{nN} x_k B^{-k}$  wird vom Komma aus in Gruppen von je  $N$  Ziffern, das heißt in  $(nN)$ -stellige Zahlen  $\xi_j$  aufgespalten, was einer Aufspaltung der obigen Summe nach

$$x = \sum_1^{nN} x_k B^{-k} = \sum_1^n \xi_j (B^N)^{-j}$$

entspricht, wobei die  $\xi_j$  ganze Zahlen mit  $0 \leq \xi_j < B^N$  sind. Zum Beispiel  $N = 3$ ,  $n = 2$ ,  $x = 0,738291$ :  $\xi_1 = 738$ ,  $\xi_2 = 291$ .

Man kann die  $\xi_j$  auch als «Ziffern» der Zahl  $x$  in einem Zahlssystem mit der Basis  $B^N$  auffassen. In der Maschine wird nun eine solche Zahl  $x$  durch ihre  $(nN)$ -stelligen «Komponenten»  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  dargestellt und benötigt deshalb  $n$  Zellen zum Speichern. Das Rechnen mit solchen Zahlen  $x, y, \dots$  muß auf das Rechnen mit ihren  $N$ -stelligen Komponenten  $\xi_j, \eta_j, \dots$ , welche die Maschine verarbeiten kann, zurückgeführt werden und soll im folgenden behandelt werden. Es ist allerdings zu beachten, daß die Komponenten durchwegs ganze Zahlen sind, so daß in diesem Abschnitt das Komma bei allen Zahlen und auch in den Zählwerken immer am Schluß der Ziffernfolge aufgefaßt werden soll.

*Addition:*  $z = x + y = \sum_1^n (\xi_j + \eta_j) B^{-Nj} = \sum_1^n \zeta_j B^{-Nj}$ . Weil nun  $\xi_j + \eta_j \geq B^N$  sein kann, ist nicht einfach  $\zeta_j = \xi_j + \eta_j$ , sondern es sind gemäß nachstehendem Algorithmus noch Gruppenüberträge  $v_j$  zu berücksichtigen:

$$\left. \begin{aligned} v_n &= 0, \\ \zeta_j &= \xi_j + \eta_j + v_j \pmod{B^N} \\ v_{j-1} &= \text{ganzer Teil von } B^{-N} (\xi_j + \eta_j + v_j) \end{aligned} \right\} (j = n, \dots, 2, 1) \quad (3.11)$$

$v_{j-1}$  ist der bei der Addition von  $\xi_j + \eta_j + v_j$  im Rechenwerk entstehende Überfluß<sup>1)</sup>.

Die Subtraktion wird natürlich durch Komplementbildung auf die Addition zurückgeführt, zum Beispiel ( $N = 2$ ,  $n = 3$ ):

+ ,529373 → 0'52	0'93	0'73	- ,529373 → 9'47	0'06	0'26
- ,352589 → 9'64	0'74	0'10	+ ,352589 → 0'35	0'25	0'89
<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">1</div> 0'16	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">1</div> '67	0'83	9'82	0,31	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">1</div> '15
<div style="border-bottom: 1px solid black; width: 100px; margin: 0 auto;"></div> 1			<div style="border-bottom: 1px solid black; width: 100px; margin: 0 auto;"></div> 1		
+ ,176784 ← 0'17	0'67	0'84	- ,176784 ← 9'82	0'32	0'15

<sup>1)</sup> In diesem speziellen Fall sind Überflüsse toleriert und dürfen die Maschine nicht zum Anhalten bringen, nur dürfen sie nicht verlorengehen, sondern müssen zur nächst höheren Gruppe addiert werden.

(Die Stelle, wo das Komma im Rechenwerk normalerweise zu denken ist, ist durch ein hochgestelltes Komma angedeutet). Wie man sieht, werden nur in der vordersten Komponente normale  $(B-1)$ -Komplemente (mit dieser Kommastellung Ergänzung auf  $B^{N+1}-1$ ) verwendet, in den hinteren Gruppen wird auf  $B^N-1$  ergänzt.

*Multiplikation*<sup>1)</sup>. Das exakte Produkt der beiden positiven Zahlen  $x = \sum_1^n \xi_j B^{-Nj}$  und  $y = \sum_1^n \eta_j B^{-Nj}$  ist eine  $(2nN)$ -stellige Zahl, von der aber wie bei der gewöhnlichen Multiplikation meist nur der aus den ersten  $nN$  Stellen bestehende Teil  $\sum_1^n \xi_i B^{-iN}$  gebraucht wird. Es ist nun  $xy = \sum_1^n \sum_1^n \xi_j \eta_k B^{-N(j+k)}$ , wobei man mit den «Elementarprodukten»  $\xi_j \eta_k$  ganz analog vorgeht wie bei der Methode der Links- und Rechtskomponenten, indem man sie wie folgt zerlegt:

$$\xi_j \eta_k = B^N \lambda_{jk} + \varrho_{jk}.$$

Dabei sind die ganzen Zahlen  $\lambda_{jk}$  und  $\varrho_{jk}$  der wesentliche bzw. unwesentliche Teil des Produktes  $\xi_j \eta_k$ . Man erhält so schließlich die Darstellung

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= 0, \\ \xi_i &= \sum_1^i \lambda_{j,i+1-j} + \sum_1^{i-1} \varrho_{j,i-j} + v_i \pmod{B^N} \\ v_{i-1} &= \text{ganzer Teil von } B^{-N} \left( \sum \lambda_{i,i+1-j} + \sum \varrho_{j,i-j} + v_i \right); \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

für die  $(nN)$ -stellige Zahl  $z^* = \sum_1^n \xi_i B^{-Ni}$ , die, wie man zeigen kann, bis auf einen Fehler von höchstens  $2n-1$  Einheiten der letzten Stelle mit dem Produkt  $z = xy$  übereinstimmt. Der Algorithmus (3.12) vereinfacht sich im weitaus meistgebrauchten Fall der doppelten Genauigkeit zu

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \lambda_{12} + \lambda_{21} + \varrho_{11} \pmod{B^N} \\ \xi_1 &= \lambda_{11} + \text{ganzer Teil von } B^{-N} (\lambda_{12} + \lambda_{21} + \varrho_{11}). \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Beispiel ( $N=2, n=2$ ):  $7175 \times 4492 = 32230100$  (exakt).

$$\begin{aligned} 71 \times 92 &= 6532, & \lambda_{12} &= 65 \\ 74 \times 44 &= 3300, & \lambda_{21} &= 33 \\ 71 \times 44 &= 3124, & \varrho_{11} &= 24, \quad \lambda_{11} = 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} 22, \\ & \quad \rightarrow v_1 = 1, \\ & \xi_2 = 22 \quad \xi_1 = 32 \text{ also } z^* = 3222 \end{aligned}$$

Die *Division* mit mehrfacher Genauigkeit wird durch Multiplikation des Zählers mit dem reziproken Wert des Nenners bewerkstelligt, wofür letzterer

<sup>1)</sup> Vgl. auch W. EBERL, S. 411 dieses Heftes.

durch ein Iterationsverfahren bestimmt wird (vgl. § 4.8), wobei der reziproke Wert der höchsten Komponente als erste Approximation dient. Entsprechendes gilt für die *Quadratwurzel*.

Es ist ganz klar, daß das Rechnen stark verlangsamt wird, sobald die Stellenzahl der Maschine nicht mehr genügt und man deshalb mit mehrfacher Genauigkeit arbeiten muß. v. NEUMANN [24] Bd. 1, Kap. 9, zum Beispiel rechnet mit achtfacher Rechenzeit für doppelte Genauigkeit.

### 3.6 Aufrunden

Die programmgesteuerten Rechenmaschinen rechnen mit Dezimal- oder Dualbrüchen fester Stellenzahl  $N$ . Da nun gewisse Rechenoperationen — insbesondere Multiplikation und Division, bei beweglichem Komma auch die Addition — aus diesem Zahlenbereich herausführen, muß man die überschüssigen Stellen weglassen, womit die Resultate verfälscht werden. Es sind folgende Aufrundungsregeln im Gebrauch (vgl. auch Fig. 4)<sup>1)</sup>:




		Maximaler Fehler	Mittlerer Fehler	Mittleres Fehlerquadrat
a		$\eta$	$\eta/2$	$\frac{\eta^2}{3}$
b		$\eta/2$	0	$\frac{\eta^2}{12}$
c		$\eta$	0	$\frac{\eta^2}{3}$

Fig. 4  
Aufrundungsregeln.

- Die überschüssigen Stellen fallen einfach weg.
- Die letzte nicht weggelassene Stelle wird um 1 erhöht, falls der weggelassene Teil  $\geq \eta/2$  ist, d. h. man addiert zuerst  $\eta/2$  und handelt dann nach a.
- Die letzte nicht weggelassene Stelle wird gleich der nächstliegenden ungeraden Ziffer gemacht, es sei denn, der weggelassene Teil sei genau 0. Dies heißt sowohl bei einer rein dualen als auch bei einer dezimalen Maschine, welche die ungeraden Ziffern durch ungerade Tetraden verschlüsselt, daß die letzte Dualziffer der Zahl  $L$  zu machen sei, ohne die übrigen zu verändern.

<sup>1)</sup> Vgl. Abschnitt 5.12 bei [40].

<sup>2)</sup>  $\eta$  = eine Einheit der letzten Stelle (wie in § 3.51).



Es ist nun sehr wichtig, daß die Rundungsregel symmetrisch sei, d. h. daß der mittlere Fehler verschwinde, weil dieser sich besonders gefährlich auswirkt.

Infolgedessen scheidet die Rundungsregel a aus. Da unter den symmetrischen Regeln c vor b den Vorteil hat, daß man den weggelassenen Teil nicht kennen muß und daß das Aufrunden keine Überträge auslöst, wird sie vor allem beim Dividieren verwendet (bei Mark II für alle Operationen).

Für konegative Zahlen — insbesondere mit  $(B - 1)$ -Komplementen — wird Aufrunden komplizierter<sup>1)</sup>, so daß man meist nur die Absolutbeträge rundet.

*Beispiel* für Regel b (Runden auf zwei Stellen nach dem Komma):

Zehnkomplement	Neunkomplement
— ,2235 $\rightarrow$ 9,7765	9,7764
$\frac{1}{2} \eta \rightarrow + 50$	— 50
— 0,22 $\leftarrow$ 9,78(15)	9,77(14)

Während man also bei  $B$ -Komplementen *immer*  $\eta/2$  vor dem Weglassen addieren muß, muß man im Fall der  $(B - 1)$ -Komplemente bei negativen Zahlen  $\eta/2$  *subtrahieren*.

### 3.7 Übersetzen vom Dezimal- ins Dualsystem und umgekehrt

Da das Dualsystem bei den rein dualen Maschinen (§ 3.1) eine rein interne Angelegenheit ist, müssen die von außen kommenden und deshalb im Dezimalsystem gegebenen Anfangswerte eines Problems zuerst ins Dualsystem umgerechnet werden; außerdem hat am Ende der Rechnung eine Rückübersetzung ins Dezimalsystem zu erfolgen.

Um hierzu nicht noch ein spezielles Rechengерät bauen zu müssen, läßt man diese Übersetzungsarbeit von der Rechenmaschine selbst ausführen, wobei sich aber eine spezielle Schwierigkeit ergibt: Die Maschine rechnet rein dual, muß aber andererseits mit dezimalen Zahlen umgehen können, um sie ins Dualsystem zu übersetzen. Diese Schwierigkeit wird dadurch behoben, daß man die dezimalen Zahlen verschlüsselt, und zwar durch die direkte Verschlüsselung (§ 3.2). Der Einfachheit halber wollen wir uns im folgenden auf Maschinen mit festem Komma beschränken, so daß nur echte Dezimalbrüche zu übersetzen sind. Sei

also die Zahl  $x = \sum_{k=1}^M x_k 10^{-k}$   $M$ -stellig dezimal (dual verschlüsselt) in der Maschine. Jede der Ziffern  $x_k$  ist als vierstellige Dualziffer dargestellt, so daß die ganze Zahl  $4M$  Dualziffern braucht, welches gerade die Kapazität der Maschine sein soll. Wenn man diese  $4M$  Dualziffern als eine reine Dualzahl auffaßt, stellt sie die von  $x$  völlig verschiedene Zahl  $y = \sum_{k=1}^M x_k 16^{-k}$  dar. Tatsächlich

<sup>1)</sup> A. BURKS, *Digital Machine functions*, Lecture 8 in [39].

wird dies von der Maschine auch so aufgefaßt, so daß die Aufgabe, vom Standpunkt der Maschine aus gesehen, darin besteht, im Dualsystem aus der Zahl  $y$  die Zahl  $x$  zu berechnen, was durch folgenden Algorithmus geleistet wird<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= y, \quad q_0 = 0, \\ x_k &= \text{ganzer Teil} \\ p_k &= \text{gebrochener Teil} \\ q_k &= 10 q_{k-1} + 16^{-M} x_k \\ x &= \frac{q_M}{0,625^M} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{von } 16 p_{k-1}^{(2)} \\ &k = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Zahl  $0,625^M$ , welche eine Maschinenkonstante ist, wird natürlich ein für allemal in der Maschine gespeichert.

Die Rückübersetzung ins Dezimalsystem ist noch wesentlich einfacher<sup>3)</sup>: Sei die Zahl  $x$ ,  $|x| < 1$  im Dualsystem gegeben, gesucht ist dieselbe Zahl dual verschlüsselt im Dezimalsystem.

$$x = \sum_{k=1}^M x_k 10^{-k} \quad (x_k = \text{Tetraden}).$$

Die Maschine berechnet natürlich nicht  $x$ , sondern wieder die Zahl  $y = \sum_{k=1}^M x_k 16^{-k}$ , welche dual geschrieben gleich lautet wie die dual verschlüsselte Dezimalzahl  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= x, \quad q_0 = 0, \\ x_k &= \text{ganzer Teil} \\ p_k &= \text{gebrochener Teil} \\ q_k &= 16^{-M} x_k + 16 q_{k-1}, \\ y &= q_M. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{von } 10 p_{k-1} \\ &k = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (3.15)$$

Fortsetzung und Schluß folgt in ZAMP II, 1951.

<sup>1)</sup> Im wesentlichen bei v. NEUMANN und GOLDSTINE [24], Bd. 1, Kap. 9. Eine davon abweichende Methode wurde für die EDVAC gegeben [34].

<sup>2)</sup> Der ganze Teil von  $16 p_{k-1}$  wird praktisch folgendermaßen bestimmt:

Man bildet das Produkt  $16^{1-M} p_{k-1}$ , dann erhält man in MR den gebrochenen, in AC dagegen den ganzen Teil von  $16 p_{k-1}$ , wobei in AC das Komma am Ende der Zifferngruppe zu denken ist. Denkt man hingegen in AC das Komma normal am Anfang, so ist die in AC stehende Zahl gerade die bei der Berechnung von  $q_k$  auftretende Größe  $16^{-M} x_k$ .

<sup>3)</sup> Im wesentlichen bei v. NEUMANN und GOLDSTINE [24], Bd. 1, Kap. 9. Eine davon abweichende Methode wurde für die EDVAC gegeben [34].

# Über die Tragweite der Begriffe «Brennpunkte» und «Brennweite» in der Elektronenoptik und die starken Elektronenlinsen mit Newtonscher Abbildungsgleichung

## 1. Mitteilung

VON WALTER GLASER UND OTTO BERGMANN, Wien<sup>1)</sup>

### 1. Existenz von Brennebenen und Kritik des Brennweitenbegriffes

Unter dem Brennpunkt eines elektrisch-magnetischen Abbildungsfeldes versteht man den Achsenschnittpunkt einer achsenparallel einfallenden Elektronenbahn. Wenn wir über den Feldabfall keine Voraussetzungen machen, so wird die Lage des Brennpunktes davon abhängen, wo wir die Elektronenbahn achsenparallel annehmen. Man denke zum Beispiel an ein homogenes Magnetfeld, das sich seiner Natur nach auf beiden Seiten ins Unendliche erstrecken muß und in dem daher die Elektronenbahnen bis ins Unendliche ihren oszillatorischen Charakter beibehalten. Infolge der Rotationssymmetrie ist die optische Achse stets eine Feldlinie des elektrischen oder magnetischen Feldes. Da den Elektronen gerade längs der Achse der Weg freigegeben werden muß, können weder Elektroden- noch Polschuhflächen die Achse schneiden. Die axiale Feldlinie kann daher weder Anfang noch Ende haben, d. h. die elektronenoptischen Abbildungsfelder müssen sich grundsätzlich immer nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken. Ein abbrechendes Abbildungsfeld, mit dem verschiedentlich in der Elektronenoptik argumentiert wird, ist daher eine unerlaubte Fiktion. Dies trifft — nebenbei bemerkt — auch für ein nur von der  $z$ -Achse abhängiges Abbildungsfeld zu. Denn das einzige Feld ohne Abhängigkeit von der radialen Komponente ist das homogene Feld. Die Abbildungseigenschaften sind aber, zumal im elektrischen Fall, gerade durch die radialen Feldkomponenten gegeben. Rechnerisch ergibt sich aus  $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$  mit  $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  für das Potential  $\varphi$  die bekannte Entwicklung

$$\varphi = \Phi(z) - \frac{r^2}{4} \Phi''(z) + \dots$$

Ist  $\Phi''$  nicht identisch Null, also das Feld nicht homogen, dann muß es eine radiale Feldkomponente  $\mathfrak{E}_r = r/2 \Phi''(z) + \dots$  besitzen. Ein allein von  $z$  abhängiges rotationssymmetrisches Feld kann also nur ein homogenes sein, das

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Physik an der Technischen Hochschule Wien und Abteilung für Elektronenoptik der Siemens & Halske AG. in Berlin.



sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt. Für dieses ist nämlich  $\Phi''(z) = 0$ , die Feldstärke kann sich also mit  $z$  nicht ändern. Hätte es Anfang oder Ende, so müßte an diesen Stellen  $\Phi''(z) \neq 0$  sein, was notwendig zu einer nichtverschwindenden Radialkomponente führen müßte.

Ganz analog zeigt man den gleichen Sachverhalt für ein magnetisches Feld. Die Feldstärken zeigen stets eine Abhängigkeit von der  $z$ -Koordinate und haben daher nach obigem auch radiale Komponenten.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß (quellen- und wirbelfreie) elektrisch-magnetische Abbildungsfelder stets von der  $z$ -Koordinate abhängen und sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken müssen.

Da der Brennpunkt der Achsenschnittpunkt der achsenparallel einfallenden Elektronenbahn ist, müssen wir uns daher fragen, *wie stark* das Abbildungsfeld nach beiden Seiten abfallen muß, damit man in entsprechender Entfernung die Elektronenbahn als geradlinig auffassen kann. Die Differentialgleichung der flachen, achsennahen Elektronenbahnen muß daher Lösungen besitzen, die im Unendlichen asymptotisch in Gerade übergehen. Diese Differentialgleichung lautet bekanntlich

$$\sqrt{\Phi} \frac{d}{dz} (\sqrt{\Phi} \varrho') + \left( \frac{\Phi''}{4} + \frac{e}{8m\Phi} B_z^2(z) \right) \varrho = 0. \quad (1)$$

In (1) bedeutet  $\Phi$  das elektrische Potential längs der  $z$ -Achse,  $B_z(z)$  ist die  $z$ -Komponente der magnetischen Induktion auf der Achse. Aus dem linearen und homogenen Charakter der Differentialgleichung folgt die Existenz der Abbildung. Sind  $\varrho(z)$  und  $\sigma(z)$  zwei unabhängige Lösungen von (1), so ist Dingort  $z_0$  und Bildort  $z_1$  durch die Abbildungsgleichung<sup>1)</sup>

$$\frac{\sigma(z_0)}{\varrho(z_0)} = \frac{\sigma(z_1)}{\varrho(z_1)} \quad (2)$$

verknüpft. Die Vergrößerung ist durch

$$\beta = \frac{\sigma(z_1)}{\sigma(z_0)} \quad (3)$$

gegeben. Lediglich die Tatsache der optischen Abbildung ist für die Anwendungen von Wichtigkeit, während die engere Analogie mit der geometrischen Lichtoptik, wie der Gebrauch der Begriffe Brennpunkt und Brennweite, zwar praktisch, aber unwesentlich ist. Im allgemeinen Fall der elektronenoptischen Abbildung von diesen Begriffen zu sprechen, wie dies meist geschieht, entbehrt überhaupt jeder Berechtigung.

Gibt es nur achsenparallel geradlinige Asymptoten, so können wir allein von Brennpunkten sprechen. Gibt es auch zur Achse geneigte geradlinige Asymptoten, dann schneiden sich die mit gleicher Richtung in der durch den Brennpunkt gehenden Ebene, und wir können auch von Brennebenen sprechen.

<sup>1)</sup> Vgl. zum Beispiel W. GLASER, Z. Phys. **117**, 314 (1941).

Die Differentialgleichung (1) kann man durch die Substitution

$$\varrho = \Phi^{-1/4} R \tag{4}$$

auf die Gestalt

$$R'' + Q(z) R = 0 \tag{5}$$

bringen, wobei

$$Q(z) = \frac{3}{16} \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 + \frac{e B_z^2}{8 m \Phi} \tag{6}$$

ist. Die relativistische Massenkorrektur kann leicht berücksichtigt werden<sup>1)</sup>.

Wie im Anhang I gezeigt wird, ist für die Existenz des dingseitigen Brennpunktes die Konvergenz des Integrals

$$\int z Q(z) dz \tag{7}$$

erforderlich. Für die Existenz der dingseitigen Brennebene muß die schärfere Bedingung erfüllt sein, daß das Integral

$$\int z^2 Q(z) dz \tag{8}$$

konvergiert.

Für die Existenz des bildseitigen Brennpunktes bzw. der bildseitigen Brennebene ist die Konvergenz der Integrale an der Grenze  $-\infty$  erforderlich.

Wenn wir nun voraussetzen, daß beide Brennebenen existieren, so können wir in formaler Weise nach nebenstehender Figur die entsprechenden «Brennweiten»  $f$  aus den achsenparallel einfallenden Strahlen definieren.

Diese Brennweiten errechnen sich aus den Formeln

$$f_1 = \frac{\sigma(-\infty)}{\sigma'(z_{F_1})}; \quad f_0 = \frac{\varrho(+\infty)}{\varrho'(z_{F_0})}, \tag{9}$$

worin  $\sigma(z)$  und  $\varrho(z)$  die von links bzw. rechts achsenparallel einfallenden Strahlen bedeuten. Die Kenntnis von Brennpunkten und Brennweiten genügt aber, um zum Objekt  $G$  ein «Bild»  $B^*$  nach der üblichen Bildkonstruktion, wie in Fig. 2 angedeutet, zu bestimmen.

Man erhält dann eine «Vergrößerung»  $\beta^*$  nach der Linsengleichung

$$\beta^* = \frac{B^*}{G} = \frac{f_0}{z_0 - z_{F_0}} = \frac{z_1^* - z_{F_1}}{f_1}. \tag{10}$$

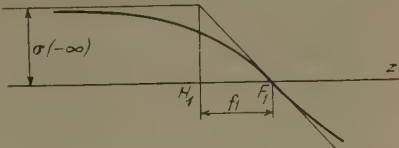


Fig. 1  
Übliche Definition des «Brennpunktes» als Bild  $F_1$  des unendlichfernen Dingpunktes,  $H_1$  «Hauptpunkt»,  $F_1 H_1$  «Brennweite».

<sup>1)</sup> Siehe z. B. W. GLASER, Z. Phys. 81, 637 (1933); 83, 104 (1933); M. COTTE, Ann. Phys. [11], 10, 333 (1938); und J. LAPLUME, Cah. Phys. 29 (1946).

Die auf Grund dieses Verfahrens bestimmte Abbildung wollen wir die zur elektronenoptischen Abbildung «zugeordnete Newtonsche Abbildung» nennen. Das so gewonnene «Bild»  $B^*$  wird aber sowohl nach Lage und Größe vom tatsächlichen Bild, das nach der strengen Abbildungsgleichung (2) berechnet wird, verschieden sein. Berechnet man daher die Brennweite aus der experimentell bestimmten Vergrößerung unter Benutzung der Gleichung

$$f_1 = \frac{z_1 - z_{F_1}}{\beta}, \quad (11)$$

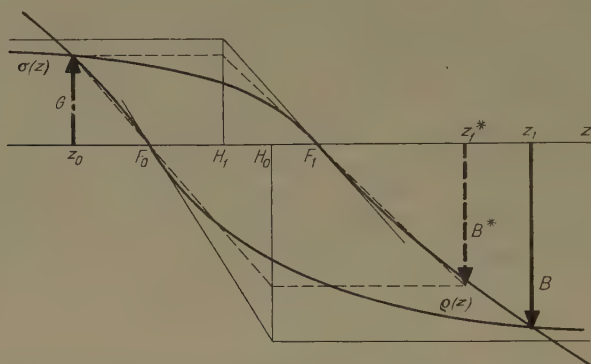


Fig. 2

Zur Festlegung der «zugeordneten» Newtonschen Abbildung.  $B$  ist das Bild auf Grund der tatsächlichen elektronenoptischen Abbildung,  $B^*$  ist das mittels «Brennweiten» und «Hauptpunkten» konstruierte «zugeordnete» Bild.

so wird man einen Wert erhalten, der im allgemeinen nicht mit dem aus (9) bestimmten übereinstimmen wird. Nur in dem besonderen Fall, daß zugeordnetes Bild  $B^*$  und tatsächliches Bild  $B$  nach Lage und Größe zusammenfallen, ist es berechtigt, aus der gemessenen Vergrößerung  $\beta$  ( $=\beta^*$ ) die Brennweite nach (11) zu berechnen. Stimmt zugeordnetes und tatsächliches Bild nicht überein, hat die nach Fig. 1 bestimmte Brennweite keine physikalische Bedeutung und wird insbesondere nicht unmittelbar die Vergrößerung bestimmen.

Man erkennt aus Fig. 2, daß elektronenoptische und zugeordnete Newtonsche Abbildung sicher immer dann zusammenfallen, wenn es sich um ein schwaches Abbildungsfeld handelt, d. h. wenn der Raum links von  $F_0$  und rechts von  $F_1$  praktisch feldfrei ist.

Die Aufgabe, alle starken Abbildungsfelder zu bestimmen, für welche die experimentelle Ermittlung der Brennweiten nach Gleichung (11) berechtigt ist und mit der nach Fig. 1 aus einem achsenparallel einfallenden Strahl gewonnenen übereinstimmt, wurde erstmalig von GLASER<sup>1)</sup> gestellt und dann in zwei weiteren Veröffentlichungen von GLASER und LAMMEL<sup>2)</sup> gelöst.

<sup>1)</sup> W. GLASER, Z. Phys. 117, 285 (1941).

<sup>2)</sup> W. GLASER und E. LAMMEL, Ann. Phys. 40, 367 (1941); Mh. Math. Phys. 40, 289 (1943).



In einem späteren Abschnitt dieser Arbeit sollen die magnetischen Abbildungsfelder dieser Klasse näher diskutiert werden.

## 2. Oskulierende Newtonsche Abbildung

Um die Bedeutung der nach Fig. 1 ermittelten Brennweiten für die elektronenoptische Abbildung zu erkennen, wollen wir die allgemeine elektronenoptische Abbildungsgleichung (2), (3) in der Nähe zweier konjugierter Punkte untersuchen. Seien  $z_0$  und  $z_1$  zwei nach (2) einander zugeordnete Punkte. Wir betrachten den Bildort  $z_1 + \Delta z_1$ , der zu einem benachbarten Dingort  $z_0 + \Delta z_0$  gehört.

Wir wollen unsere Betrachtungen zunächst auf rein magnetische Abbildungsfelder beschränken. Bei der Abbildung durch elektrische Linsen hat man es meist mit einem feldfreien Ding- und Bildraum zu tun, so daß die Gesetze der zugeordneten Newtonschen Abbildung verwirklicht sind. Denn zur Vermeidung von Störungen des elektrischen Abbildungsfeldes muß man das Objekt außerhalb desselben annehmen. Wie sich übrigens zeigen wird, lassen sich für starke elektrische Abbildungsfelder (Objekt im Feldbereich) die nachfolgenden Beziehungen auch nachweisen, wenn eine bestimmte zusätzliche Bedingung erfüllt ist.

Bezeichnen wir die Partikularlösungen von (5) mit  $u$  und  $w$ , so haben wir

$$\varrho = \Phi^{-1/4} u; \quad \sigma = \Phi^{-1/4} w.$$

Im rein magnetischen Abbildungsfeld können wir daher  $\varrho$  mit  $u$  und  $\sigma$  mit  $w$  identifizieren.

Bezeichnen wir die Vergrößerung für die Objektlage  $z_0 + \Delta z_0$  mit  $B$ , so erhalten wir

$$B = \frac{u(z_1 + \Delta z_1)}{u(z_0 + \Delta z_0)} = \frac{w(z_1 + \Delta z_1)}{w(z_0 + \Delta z_0)}; \quad \beta = \frac{u(z_1)}{u(z_0)} = \frac{w(z_1)}{w(z_0)}. \quad (12)$$

Der Zusammenhang zwischen Dingweite  $\Delta z_0$  und Bildweite  $\Delta z_1$  (Abbildungsgleichung) ergibt sich zu

$$u(z_1 + \Delta z_1) w(z_0 + \Delta z_0) = u(z_0 + \Delta z_0) w(z_1 + \Delta z_1). \quad (13)$$

Entwickeln wir nach  $\Delta z_1$  und  $\Delta z_0$  bis zu Gliedern 3. Ordnung, so erhalten wir

$$\begin{aligned} u_1 w_0 - w_1 u_0 + (u_1 w'_0 - w_1 u'_0) \Delta z_0 + (u'_1 w_0 - u_0 w'_1) \Delta z_1 \\ + (u'_1 w'_0 - u'_0 w'_1) \Delta z_0 \Delta z_1 + \frac{1}{2} (u''_1 w_0 - u_0 w''_1) (\Delta z_1)^2 \\ + \frac{1}{2} (u_1 w''_0 - w_1 u''_0) (\Delta z_0)^2 = 0. \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen  $u''$  und  $w''$  können wir auf Grund der Differentialgleichung (5), der  $u$  und  $w$  genügen, eliminieren. Wegen der Abbildungsgleichung

$$u_1 w_0 - w_1 u_0 = 0$$

verschwindet daher das erste und letzte Glied.

Wir schreiben zur Abkürzung

$$a = \begin{vmatrix} w_0 & u_0 \\ w_1 & u_1 \end{vmatrix}; \quad b = \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w'_0 & u'_0 \end{vmatrix}; \quad c = \begin{vmatrix} w'_0 & u'_0 \\ w'_1 & u'_1 \end{vmatrix} \quad (14)$$

und

$$C = \begin{vmatrix} w_0 & u_0 \\ w'_0 & u'_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w'_1 & u'_1 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Die Konstanz des Ausdrucks (15) folgt in bekannter Weise, wenn wir die Differentialgleichung (5) für  $u$  mit  $w$  und die für  $w$  mit  $u$  multiplizieren und dann subtrahieren. Zwischen den Konstanten (14) und (15) bestehen gewisse Zusammenhänge. Berechnen wir  $\beta C$ , indem wir das erste Glied von  $C$  mit  $\beta = w_1/w_0$  und das zweite Glied mit  $\beta = u_1/u_0$  multiplizieren, so erhalten wir

$$\beta C = b. \quad (16)$$

Analog zeigt man

$$\beta a = C. \quad (17)$$

Daher ist

$$\beta^2 = \frac{b}{a}. \quad (18)$$

Die Abbildungsgleichung (13) lautet nunmehr

$$\Delta z_1 = \frac{\frac{b}{a} \Delta z_0}{1 + \frac{c}{a} \Delta z_0} = \frac{\beta^2 \Delta z_0}{1 + \frac{c}{a} \Delta z_0} \quad (19)$$

und die Vergrößerung (12)

$$B = \beta \frac{1 + \frac{u'_1}{u_1} \Delta z_1}{1 + \frac{u'_0}{u_0} \Delta z_0}. \quad (20)$$

Wenn wir aus der Abbildungsgleichung für  $\Delta z_1$  einsetzen und konsequent Glieder höherer Ordnung vernachlässigen, bekommt Gleichung (20) die Gestalt

$$B = \beta \{ 1 + \gamma \Delta z_0 \}, \quad (21)$$

wobei wir zur Abkürzung

$$\gamma = \beta^2 \frac{u'_1}{u_1} - \frac{u'_0}{u_0} \quad (22)$$

gesetzt haben.

Nach (15) gilt

$$w'_0 = \frac{w_0 u'_0 - C}{u_0}; \quad w'_1 = \frac{u'_1 w_1 - C}{u_1},$$

also ist

$$c = u'_1 u'_0 \left( \frac{w_0}{u_0} - \frac{w_1}{u_1} \right) - C \left( \frac{u'_1}{u_0} - \frac{u'_0}{u_1} \right).$$

Auf Grund der Abbildungsgleichung verschwindet der erste Ausdruck, und wir erhalten

$$c = -\frac{C}{\beta} \left( \frac{u'_1}{u_0^2} \cdot \frac{u'_1}{u_1} - \frac{u'_0}{u_0} \right) = -C \frac{\gamma}{\beta}, \quad (23)$$

so daß nach (17)

$$c = -a \gamma \quad (24)$$

ist. Die Vergrößerung ist daher

$$B = \beta \left\{ 1 - \frac{c}{a} \Delta z_0 \right\} = \frac{\beta}{1 + \frac{c}{a} \Delta z_0}. \quad (25)$$

Der Vergleich mit Abbildungsgleichung (19) zeigt, daß die «Tiefenschärfe» allgemein in der untersuchten Näherung durch

$$\frac{\Delta z_1}{\Delta z_0} = B \beta \quad (26)$$

gegeben ist. Die gewonnenen Formeln (19) und (25) können wir mit den analogen Formeln der gewöhnlichen Lichtoptik vergleichen. Zwei konjugierte Punkte sind durch die Gleichungen

$$\beta = \frac{z_1 - z_{F_1}}{f_1} = \frac{f_0}{z_0 - z_{F_0}}; \quad B = \frac{z_1 - z_{F_1} + \Delta z_1}{f_1} = \frac{f_0}{z_0 - z_{F_0} + \Delta z_0} \quad (27)$$

verknüpft. Aus der zweiten Gleichung folgt

$$\Delta z_1 = \frac{-\frac{f_1}{f_0} \beta^2 \Delta z_0}{1 + \frac{\beta}{f_0} \Delta z_0}, \quad (28)$$

und für die Vergrößerung ergibt sich

$$B = \frac{\beta}{1 + \frac{\beta}{f_0} \Delta z_0}. \quad (29)$$

Wir erkennen, daß unsere Formeln (19) und (25) die gleiche Gestalt haben wie die entsprechenden Formeln der Lichtoptik. Es zeigt sich weiterhin, daß wir, ohne zu einem Widerspruch zu kommen, die entsprechenden Ausdrücke gleich-



setzen können. Durch Gleichsetzen des Zählers und des Nenners erhalten wir

$$f_1 = -f_0 \quad (30)$$

und

$$\frac{\beta}{f_0} = \frac{c}{a}. \quad (31)$$

Durch diese beiden Gleichungen ist eine Newtonsche Abbildung definiert, welche wir die «oskulierende Newtonsche Abbildung» unserer elektronenoptischen Abbildung in den beiden konjugierten Punkten  $z_0$  und  $z_1$  nennen wollen.

Für die Brennweiten der oskulierenden Newtonschen Abbildung ergibt sich nach (31), (17) und (14), (15)

$$\frac{1}{f_0} = \frac{w'_0 u'_1 - w'_1 u'_0}{w_0 u'_0 - w'_0 u_0} \quad (32)$$

und nach (30)

$$\frac{1}{f_1} = \frac{w'_1 u'_0 - w'_0 u'_1}{w_1 u'_1 - w'_1 u_1}, \quad (33)$$

so daß  $1/f_1$  aus  $1/f_0$  durch Vertauschung der Indizes 0 und 1 hervorgeht, wenn wir bedenken, daß die Wronski-Determinante (15) im Nenner bei dieser Vertauschung ungeändert bleibt. Da die Brechkraft durch den Quotienten zweier Determinanten aus zwei Partikularlösungen gegeben ist, bleibt sie ungeändert, wenn man zu einem neuen Paar von Partikularlösungen übergeht. Das muß natürlich der Fall sein.

Diese Brennweiten haben im Rahmen der allgemeinen elektronenoptischen Abbildung folgende Bedeutung:

Ist  $r$  eine Elektronenbahn, die im zweiten Bezugspunkt  $z_1$  achsenparallel ist, so kann sie mittels einer Konstanten durch

$$r = \text{const} (w u'_1 - w'_1 u) \quad (34)$$

gegeben werden. Die Brennweite  $f_0$  ist dann nach (32) durch

$$f_0 = \frac{r(z_1)}{r'(z_0)} \quad (35)$$

gegeben. Wir betrachten ein Elektronenbündel, das die zweite Bezugsebene  $\pi_1$  senkrecht durchsetzt (Fig. 3). Man sieht sogleich, daß die Tangenten an die Elektronenbahnen dieses Bündels in der ersten Bezugsebene  $\pi_0$  die Achse in ein und demselben Punkt schneiden. Diesen Punkt nennen wir den oskulierenden Brennpunkt  $F_0$  der Abbildung. Die Entfernung der Ebene  $\pi_0$  von diesem Brennpunkt bezeichnen wir mit  $Z_0$ . Sie ist gegeben durch

$$Z_0 = \frac{r(z_0)}{r'(z_0)}. \quad (36)$$



im allgemeinen Fall keine unmittelbare Beziehung zur Newtonschen Abbildung. Im Falle, daß der Punkt  $S$  bereits im feldfreien Raum liegt, fällt der oskulierende Brennpunkt im obigen Sinne mit  $S$  zusammen. Ganz analog ergibt sich die zweite Brennweite und Hauptebene.

Unsere Abbildungsgleichung (19) können wir in der Gestalt

$$(\Delta z_1 + Z_1) (\Delta z_0 + Z_0) = f_0 f_1 \quad (41)$$

schreiben. Durch Vergleich von (31) mit (37) ergibt sich

$$Z_0 = \frac{f_0}{\beta}, \quad (42)$$

und für die Vergrößerung erhalten wir nach (25)

$$B = \frac{f_0}{\Delta z_0 + Z_0}. \quad (43)$$

Wir erkennen daraus, daß die Vergrößerung für  $\Delta z_0 = f_0 - Z_0$  eins würde.  $\Delta z_0 = f_0 - Z_0$  gibt uns aber gerade die Entfernung der oskulierenden Hauptebene von der ersten Bezugsebene  $\pi_0$ . Damit haben wir für unsere oskulierenden Haupt- und Brennpunkte die gleichen Eigenschaften nachgewiesen wie in der Lichtoptik, und es kann daher auch die bekannte Listingsche Bildkonstruktion angewendet werden.

Wir wollen nochmals darauf hinweisen, daß strenggenommen jedes konjugierte Punktepaar seine eigenen oskulierenden Kardinalelemente besitzt<sup>1)</sup>. Nur in den Fällen der schwachen Abbildungsfelder oder der Felder mit Newtonscher Abbildungsgleichung fallen diese oskulierenden Brenn- und Hauptpunkte für alle konjugierten Punktepaare zusammen.

Die experimentelle Bestimmung dieser oskulierenden Brennweite kann strenggenommen — d. h. wenn das Feld nicht als Feld mit Newtonscher Abbildungsgleichung aufgefaßt werden kann — in exakter Weise nur nach der aus (43) folgenden Gleichung

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{\Delta z_0} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{\beta} \right) \quad (44)$$

durchgeführt werden. Die Objektverschiebung könnte in der Art, wie dies E. RUSKA<sup>2)</sup> gemacht hat, durch besondere Meßsätze verschieden hoher Blendenfassungen erreicht werden. Die neue Scharfstellung des Bildes hätte allerdings nicht durch eine Abgleichung des Objektivstromes zu erfolgen, sondern durch eine entsprechende Verschiebung des Bildschirmes. Infolge von (26)

<sup>1)</sup> Die oskulierenden Kardinalelemente für nichtnewtonsche Abbildungsfelder, zum Beispiel für die vom erweiterten Glockenfeldtypus  $B_z = B_0/[1 + (z/a)^2]^\mu$  ( $\mu > 1$ ), sollen in einer folgenden, gemeinsam mit F. LENZ verfaßten Arbeit explizit bestimmt werden.

<sup>2)</sup> E. RUSKA, Über den Bau und die Bemessung von Polschuhlin sen für hochauflösende Elektronenmikroskope, Arch. Elektrotechn. 38, 102 (1944).



würde bei einer Vergrößerung  $\beta \approx 100$  eine 10000fache Bildschirmverschiebung notwendig sein, was bei der geringsten von RUSKA erreichten Objektverschiebung von 0,1 mm bereits eine Bildschirmverschiebung von 1 m erfordern würde. Infolge der hohen Tiefenschärfe wird natürlich eine geringere Verschiebung des Bildes genügen. Vielleicht ist es bei einer kleineren Objektverschiebung, die natürlich anzustreben wäre, sogar möglich, den Auffangschirm an seiner Stelle zu belassen.

Für den bei den Anwendungen besonders wichtigen Fall hoher Vergrößerung können wir als die beiden konjugierten Bezugsebenen zwei Ebenen betrachten, die mit der im Sinne von Abschnitt 1 definierten Brennebene und der zugeordneten unendlich fernen Ebene zusammenfallen, wobei wir aber noch immer mit einem endlichen Wert von  $\beta$ , zum Beispiel 100, rechnen dürfen. Der zugehörige oskulierende Brennpunkt fällt in diesem Fall mit dem Brennpunkt im Sinne von Abschnitt 1 zusammen. Auch die Brennweite stimmt dann mit der früher gebrachten (Fig. 1) überein.

Wenn wir nun auch die Abbildung in einem starken elektrischen Abbildungsfeld in Betracht ziehen, dann können wir genau wie oben zeigen, daß die Zuordnung zwischen Ding- und Bildpunkt in der Nähe zweier konjugierter Punkte in derselben Approximation wie oben durch die Gleichung

$$\Delta z_1 = \frac{\frac{b}{a} \Delta z_0}{1 + \frac{c}{a} \Delta z_0} \tag{45}$$

gegeben ist, wobei  $a, b$  und  $c$  mit den partikulären Integralen  $w$  und  $u$  der Differentialgleichung (5) nach (14) erklärt sind. Wenn wir rein formal eine »Vergrößerung«  $\bar{B}$  und  $\bar{\beta}$  durch

$$\bar{B} = \frac{w(z_1 + \Delta z_1)}{w(z_0 + \Delta z_0)} = \frac{u(z_1 + \Delta z_0)}{u(z_0 + \Delta z_0)}; \quad \beta = \frac{w(z_1)}{w(z_0)} = \frac{u(z_1)}{u(z_0)} \tag{46}$$

eingeführen, haben wir dieselben Verhältnisse wie früher, und  $\bar{B}$  ist daher durch

$$\bar{B} = \frac{\bar{\beta}}{1 + \frac{c}{a} \Delta z_0} \tag{47}$$

gegeben. Die tatsächlichen Vergrößerungen  $B$  und  $\beta$  nach (3) stehen mit  $\bar{B}$  und  $\bar{\beta}$  in folgendem Zusammenhang

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{\varrho(z_1 + \Delta z_1)}{\varrho(z_0 + \Delta z_0)} = \sqrt[4]{\frac{\Phi_0}{\Phi_1}} \bar{B} \frac{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\Phi'_0}{\Phi_0} \Delta z_0}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\Phi'_1}{\Phi_1} \Delta z_1} \\ \beta &= \frac{\varrho(z_1)}{\varrho(z_0)} = \sqrt[4]{\frac{\Phi_0}{\Phi_1}} \bar{\beta} \end{aligned} \right\} \tag{48}$$

Durch Einsetzen von (45) und (47) ergibt sich

$$B = \frac{\beta}{1 + \left[ \frac{c}{a} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\Phi'_0}{\Phi_0} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\Phi'_1}{\Phi_1} \cdot \frac{b}{a} \right] \Delta z_0}. \quad (49)$$

Wenn wir in die Formeln (16), (17) und (18), welche für  $\bar{\beta}$  gelten, die Vergrößerung einführen, erhalten wir

$$\beta \sqrt[4]{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} C = b; \quad \beta \sqrt[4]{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} a = C; \quad \beta^2 \sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} = \frac{b}{a}. \quad (50)$$

Damit können wir unsere Abbildungsgleichung (45) in der Gestalt schreiben

$$\Delta z_1 = \frac{\beta^2 \sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} \Delta z_0}{1 + \frac{c}{a} \Delta z_0}. \quad (51)$$

Vergleichen wir diese Gleichungen (49) und (51) mit den entsprechenden Newtonschen (28), (29), dann sehen wir, daß unsere Gleichungen eine oskulierende Newtonsche Abbildung darstellen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$-\frac{f_1}{f_0} = \sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}}; \quad (52)$$

$$\frac{\beta}{f_0} - \frac{c}{a} = \frac{c}{a} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\Phi'_0}{\Phi_0} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\Phi'_1}{\Phi_1} \cdot \frac{b}{a}. \quad (53)$$

Die erste Gleichung stellt die bekannte Beziehung zwischen den Brennweiten eines optischen Systems der gewöhnlichen Lichtoptik dar. In der Elektronenoptik wird sie gewöhnlich nur unter der Voraussetzung von feldfreiem Ding- und Bildraum hergeleitet, wo sie unmittelbar aus der Konstanz von

$$\sqrt{\Phi} (q \sigma' - q' \sigma) \quad (54)$$

gefolgert werden kann. Man sieht, daß sie für die beiden oskulierenden Brennweiten allgemein gilt. Allerdings zeigt die zweite Bedingung (53), daß nicht jedes elektrische Abbildungsfeld in allen konjugierten Punktepaaren eine oskulierende Newtonsche Abbildung besitzt. Es muß zwischen den Feldern in zwei zugeordneten Punkten die Bedingung

$$\frac{\Phi'_0}{\Phi_0} - \frac{\Phi'_1}{\Phi_1} \cdot \frac{b}{a} = 0 \quad (55)$$

erfüllt sein. Mit (50) folgt hieraus

$$\frac{\Phi'_0}{\Phi'_1} = \beta^2 \sqrt{\frac{\Phi_0}{\Phi_1}}. \quad (56)$$

Nach (46) und (48) ist

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\Phi_0}{\Phi_1}} \cdot \frac{w_1}{w_0} = \sqrt[4]{\frac{\Phi_0}{\Phi_1}} \cdot \frac{u_1}{u_0}.$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung (5) [für  $B_z(z) = 0$ ] können wir daher die Bedingung (56) für die Existenz einer oskulierenden Newtonschen Abbildung im starken elektrischen Abbildungsfeld durch

$$\left(\frac{w_1}{w_0}\right)^4 = \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^4 = \frac{Q_0}{Q_1} \quad (57)$$

ausdrücken<sup>1)</sup>. Eine genauere Diskussion dieser Bedingung und die explizite Bestimmung derartiger Felder wollen wir einer späteren Arbeit vorbehalten.

Um die geometrische Bedeutung unserer optischen Konstanten im starken elektrischen Abbildungsfeld zu erkennen, müssen wir die für die Abbildung kennzeichnenden Determinanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $C$  durch die wirklichen Elektronenbahnen  $\varrho$  und  $\sigma$  ausdrücken. Wir definieren dazu in analoger Weise

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \varrho_0 \\ \sigma'_1 & \varrho'_1 \end{vmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \varrho_1 \\ \sigma'_0 & \varrho'_0 \end{vmatrix}; \quad \bar{c} = \begin{vmatrix} \sigma'_0 & \varrho'_0 \\ \sigma' & \varrho' \end{vmatrix}. \quad (58)$$

Es zeigt sich, daß gerade auf Grund der Bedingung (55) die Beziehungen gelten

$$\bar{a} = \frac{a}{\sqrt[4]{\Phi_0 \Phi_1}}; \quad \bar{b} = \frac{b}{\sqrt[4]{\Phi_0 \Phi_1}}; \quad \bar{c} = \frac{c}{\sqrt[4]{\Phi_0 \Phi_1}}. \quad (59)$$

Definiert man analog zu (15)

$$\bar{C}_0 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \varrho_0 \\ \sigma'_0 & \varrho'_0 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{C}_1 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \varrho_1 \\ \sigma'_1 & \varrho'_1 \end{vmatrix}, \quad (60)$$

so ist allgemein

$$\bar{C}_0 = \frac{C}{\sqrt[4]{\Phi_0}} \quad \text{und} \quad \bar{C}_1 = \frac{C}{\sqrt[4]{\Phi_1}}. \quad (61)$$

Für die reziproken Brennweiten findet man daher

$$\frac{1}{f_0} = \sqrt[4]{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} \cdot \frac{c}{C} \quad \text{und} \quad \frac{1}{f_1} = -\sqrt[4]{\frac{\Phi_0}{\Phi_1}} \cdot \frac{c}{C}, \quad (62)$$

und wenn wir  $c$ ,  $C$  in  $1/f_0$  durch  $\bar{c}$ ,  $\bar{C}_1$  ersetzen

$$\frac{1}{f_0} = \frac{\bar{c}}{\bar{C}_1} = \frac{\sigma'_0 \varrho'_1 - \varrho'_0 \sigma'_1}{\sigma_1 \varrho'_1 - \varrho_1 \sigma'_1} = \frac{r'(z_0)}{r(z_1)}, \quad (63)$$

womit gezeigt ist, daß die Brennweiten dieselbe geometrische Bedeutung haben wie im rein magnetischen Fall.

<sup>1)</sup> Die Bedingung (55) für die Existenz einer oskulierenden Newtonschen Abbildung ist trivialerweise erfüllt, wenn  $\Phi'_0/\Phi_0 = 0$  und  $\Phi'_1/\Phi_1 = 0$  ist, d.h. Ding und Bild in feldfreien Gebieten liegen.

Die in gleicher Weise wie früher definierten Brennpunktkoordinaten  $Z_0$  und  $Z_1$  sind durch

$$Z_0 = \frac{\bar{a}}{\bar{c}} \quad \text{und} \quad Z_1 = -\frac{\bar{b}}{\bar{c}} \quad (64)$$

gegeben. Auf Grund der Formeln (59) erhalten wir auch hier wieder die Gleichungen (37), (38), woraus die elektronenoptische Bedeutung der eingeführten Determinantenverhältnisse  $a/c$  und  $b/c$  hervorgeht.

Wir sehen also, daß die Bedingung (55), (56) oder (57) das Bestehen aller Beziehungen der oskulierenden Newtonschen Abbildung sicherstellt. Gegenüber den Verhältnissen im rein magnetischen Abbildungsfeld, wo eine oskulierende Newtonsche Abbildung für zwei beliebige konjugierte Punkte immer vorhanden ist, unterscheidet sich das elektrische Feld darin, daß dazu noch die besondere Bedingung (57) erfüllt sein muß.

Verlangen wir, daß die Abbildung im rein magnetischen Abbildungsfeld durch eine oskulierende Newtonsche Abbildung in höherer Ordnung approximiert wird, dann führt das, wie im Anhang II gezeigt wird, zu der Bedingung

$$\left(\frac{w_1}{w_0}\right)^4 = \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^4 = \frac{Q_0}{Q_1} = \frac{B_z^2(z_0)}{B_z^2(z_1)}, \quad (65)$$

welche bemerkenswerterweise mit der Bedingung (57) des rein elektrischen Feldes für eine um eine Stufe niederere Approximation übereinstimmt.

## Anhang I

### Bedingungen für die Existenz von geradlinigen Asymptoten<sup>1)</sup>

Voraussetzungsgemäß soll für den unendlich fernen Punkt  $z \rightarrow \infty$  die Tangente

$$\bar{\varrho} - \varrho(z) = \varrho'(z) (\bar{z} - z) \quad (I, 1)$$

existieren, also folgt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varrho'(z) = a; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} [\varrho(z) - \varrho'(z) z] = b, \quad (I, 2)$$

wobei  $a$  und  $b$  bestimmte Konstanten sind. Ausgedrückt in  $R$  lauten diese Bedingungen nach (4)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi^{-1/4} \left( R'(z) - \frac{1}{4} \cdot \frac{\Phi'}{\Phi} R(z) \right) = a \quad (I, 3)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi^{-1/4} \left[ R(z) \left( 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\Phi'}{\Phi} z \right) - R'(z) z \right] = b. \quad (I, 4)$$

<sup>1)</sup> Den Beweis verdanken wir Herrn P. SCHISKE.



Da aus physikalischen Gründen  $\Phi$  weder Unendlich noch Null werden kann, wird  $R$  zugleich mit  $\varrho$  nach (4) unendlich. Da  $R'$  stets endlich bleibt, muß also gleichzeitig mit (I, 2) nach (I, 3)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R'(z) = A \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi' R = \bar{A} \quad (\text{I, 5})$$

sein. Aus der zweiten Gleichung schließt man, daß  $\Phi'$  im Unendlichen verschwindet. Wir wollen nun voraussetzen, daß es stärker als  $1/z$  verschwindet. Dann lautet (I, 4), da  $\Phi$  gegen eine Konstante geht,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (R - R' z) = B. \quad (\text{I, 6})$$

Diese Bedingung ist aber zusammen mit (I, 5) dafür kennzeichnend, daß die Lösungen der Differentialgleichung (5) geradlinige Asymptoten besitzen, wie man durch Vergleich mit (I, 2) erkennt.

Wir multiplizieren (5) mit  $z$  und erhalten durch partielle Integration

$$R - R' z = \int Q R z dz. \quad (\text{I, 7})$$

Bilden wir den Limes (I, 6), so erhalten wir für ein genügend großes  $\bar{\alpha}$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} (R - R' z) = B &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\bar{\alpha}}^{\alpha} Q R z dz \\ &= \int_{\bar{\alpha}}^{\alpha} Q R z dz + \int_{\bar{\alpha}}^{\infty} Q (B - R' z) z dz = J + B \int_{\bar{\alpha}}^{\infty} Q z dz - A \int_{\bar{\alpha}}^{\infty} Q z^2 dz, \end{aligned}$$

wobei  $J$  eine Konstante bedeutet.

Für die Existenz einer achsenparallelen Asymptote genügt also die Konvergenz des Integrals

$$\int_{\bar{\alpha}}^{\infty} Q z dz, \quad (\text{I, 8})$$

und für die Existenz beliebig geneigter Asymptoten ist die Konvergenz des Integrals

$$\int_{\bar{\alpha}}^{\infty} Q z^2 dz \quad (\text{I, 9})$$

erforderlich.

In analoger Weise, wie in dem Buch *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, S. 63, von H. WEYL geschlossen wird, kann man zeigen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind, wobei man nur in unserem Falle als Ausgangslösung des

in dem erwähnten Buche angeführten sukzessiven Approximationsverfahrens

$$R_0 = Az + B \quad (\text{I, } 10)$$

zu setzen hat.

## Anhang II

### Oskulierende Newtonsche Abbildung im rein magnetischen Abbildungsfeld in höherer Näherung

Um zu den Formeln der oskulierenden Newtonschen Abbildung in höherer Näherung zu gelangen, betrachten wir die Bildkoordinate und die zugehörige Vergrößerung als Funktionen der Dingkoordinate und entwickeln beide in der Umgebung des Bezugspunktes  $z_0$  in eine Taylor-Reihe. Aus der allgemeinen Abbildungsgleichung im rein magnetischen Abbildungsfeld

$$\beta(z_0) = \frac{w[z_1(z_0)]}{w(z_0)} = \frac{u[z_1(z_0)]}{u(z_0)} \quad (\text{II, } 1)$$

worin  $z_1$  als Funktion von  $z_0$  aufgefaßt wird, erhalten wir durch Differentiation nach  $z_0$  auf Grund von (14) und (18)

$$\frac{dz_1}{dz_0} = \beta^2 \quad (\text{II, } 2)$$

und

$$\frac{d\beta}{dz_0} = -\frac{c}{C} \beta^2. \quad (\text{II, } 3)$$

$C$  und  $c$  sind die in (14) und (15) eingeführten Determinanten. Aus (II, 2) und (II, 3) folgt unmittelbar

$$\frac{d^2 z_1}{dz_0^2} = -2\beta^3 \frac{c}{C}. \quad (\text{II, } 4)$$

Bildet man die dritte Ableitung von  $z_1$ , so ergibt sich

$$\frac{d^3 z_1}{dz_0^3} = -6\beta^2 \frac{d\beta}{dz_0} \cdot \frac{c}{C} + 2\beta^3 Q_0 \frac{a}{C} - 2\beta^3 Q_1 \frac{b}{C} \cdot \frac{dz_1}{dz_0}, \quad (\text{II, } 5)$$

also

$$\frac{d^3 z_1}{dz_0^3} = 6\beta^4 \left(\frac{c}{C}\right)^2 + 2\beta^2 Q_0 \left(1 - \beta^4 \frac{Q_1}{Q_0}\right). \quad (\text{II, } 6)$$

In den beiden letzten Formeln wurden die Differentialgleichung (5) und die Formeln (16), (17) und (18) benutzt.

Ganz analog erhält man

$$\frac{d^2 \beta}{dz_0^2} = 2\beta^3 \left(\frac{c}{C}\right)^2 + \beta Q_0 \left(1 - \beta^4 \frac{Q_1}{Q_0}\right). \quad (\text{II, } 7)$$

Die Abbildungsgleichung und die Vergrößerung sind daher in dieser Näherung gegeben durch

$$\Delta z_1 = z_1(z_0 + \Delta z_0) - z_1(z_0) = \beta^2 \Delta z_0 \left\{ 1 - \beta^2 \frac{c}{C} \Delta z_0 + \left[ \beta^4 \left( \frac{c}{C} \right)^2 + \frac{1}{3} \beta^2 Q_0 \left( 1 - \beta^4 \frac{Q_1}{Q_0} \right) \right] (\Delta z_0)^2 + \dots \right\} \quad (\text{II, 8})$$

$$B = \beta \left\{ 1 - \frac{c}{C} \beta \Delta z_0 + \left[ \beta^2 \left( \frac{c}{C} \right)^2 + \frac{1}{2} Q_0 \left( 1 - \beta^4 \frac{Q_1}{Q_0} \right) \right] (\Delta z_0)^2 + \dots \right\}. \quad (\text{II, 9})$$

Durch Vergleich mit den entsprechenden Reihenentwicklungen der Newtonschen Abbildungsgleichungen (28) und (29) erkennt man, daß die elektronenoptische Abbildung im Magnetfeld eine oskulierende Newtonsche Abbildung bis inklusive Glieder 3. Ordnung darstellt, wenn die Bedingung

$$\beta^4 = \left( \frac{w_1}{w_0} \right)^4 = \left( \frac{u_1}{u_0} \right)^4 = \frac{Q_0}{Q_1} = \frac{B_z^2(z_0)}{B_z^2(z_1)} \quad (\text{II, 10})$$

erfüllt ist oder wenn  $Q_0$  und  $Q_1$  verschwinden.

### Résumé

La notion de distance focale est étudiée pour les lentilles électroniques. La grandeur de la diminution de champ, qui est nécessaire pour l'existence de foyers et de distances focales, est déterminée. La définition habituelle de la distance focale ne caractérise pas en général la formation de l'image dans le cas de lentilles électroniques fortes. La relation entre la position de l'objet et celle de l'image, de même que le grandissement linéaire sont rendus, en optique électronique, par ses fonctions plus compliquées qu'en optique de la lumière. Ces fonctions sont approchées, dans le voisinage de deux points conjugués par l'équation newtonienne osculante pour la fonction de l'image jusqu'aux termes du quatrième ordre inclusivement. A chaque paire de points conjugués correspondent ainsi les foyers, points principaux et distances focales résultant de l'équation newtonienne osculante. Si les éléments cardinaux osculateurs sont indépendants de la paire de points conjugués choisie, ils caractérisent à eux seuls la formation de l'image et sont identiques aux grandeurs définies de la façon habituelle. Nous avons appelé de tels champs, pour lesquels l'équation de formation de l'image de l'optique ordinaire est strictement valable, champs de représentation newtoniens.

La seconde partie de ce travail est consacrée à l'étude de ces champs forts. Des exemples de tels champs, qui approchent des champs existant réellement dans des lentilles électroniques, sont donnés. Si l'on veut conserver à la notion de distance focale un sens physique pour n'importe quels grandissements, il faut approcher aussi bien que possible le champ empirique par un champ de la classe newtonienne. On indique un procédé pour le faire. Enfin on examine des méthodes expérimentales, qui permettent de déterminer les distances et les points focaux de ces champs approchés ayant une formation d'image newtonienne.

(Eingegangen: 28. 2. 1950.)

## Flügelerschwingungsformen in ebener kompressibler Potentialströmung

Von NIKOLAUS ROTT, Zürich<sup>1)</sup>

Wenn bei einem schwingungsfähigen System von  $n$  Freiheitsgraden nur elastische Kräfte und Trägheitskräfte auftreten, so ergeben sich  $n$  Frequenzen der  $n$  Hauptschwingungsformen als Lösung der sogenannten Säkulargleichung, einer algebraischen Gleichung  $n$ -ten Grades mit reellen Koeffizienten, die zudem die bekannte Besonderheit hat,  $n$  reelle Lösungen zu besitzen. Beim Flatterproblem wird die Aufgabe verwickelter durch das Auftreten von Luftkräften, wodurch die Bestimmungsgleichung für die Frequenz komplexe Koeffizienten erhält. Es ergeben sich im allgemeinen auch komplexe Frequenzen als Lösung, so daß je nach dem Vorzeichen des Imaginärteiles der Frequenz Dämpfung oder Anfachung eintreten kann. Die komplexen Koeffizienten hängen dabei noch ab von der Fluggeschwindigkeit. Bei einer gewissen sogenannten «kritischen» Geschwindigkeit kann nun der Fall eintreten, daß eine Frequenz rein reell wird, die entsprechende Schwingungsform also weder gedämpft noch angefacht ist. Die Bestimmung der kritischen Geschwindigkeit des Flügelflatterns bedeutet algebraisch die Lösung der folgenden Aufgabe: eine Gleichung ist gegeben mit komplexen Koeffizienten, die von einem Parameter abhängen; gesucht ist derjenige Parameterwert, für den eine rein reelle Lösung existiert.

Bei der Durchführung dieser Aufgabe zeigt es sich, daß die Rechnungen schon bei zwei Freiheitsgraden ziemlich umfangreich werden und daß insbesondere der Zusammenhang zwischen den Ausgangsgrößen und der kritischen Geschwindigkeit unübersichtlich wird.

In den folgenden Ausführungen wird untersucht, welche *Schwingungsformen* bei der kritischen Geschwindigkeit auftreten können. Es zeigt sich, daß die *möglichen* Schwingungsformen durch die Art der Luftkräfte allein *eingeschränkt* sind. Die möglichen Schwingungsformen im kritischen Falle sind diejenigen, bei denen die Luftkräfte weder eine Arbeit leisten noch Arbeit aufnehmen, das heißt die weder angefacht noch gedämpft sind. Die elastischen und Trägheitskräfte leisten ja infolge ihres konservativen Charakters insgesamt bei periodischer Bewegung keine Arbeit. Die wirkliche Schwingungsform ergibt sich unter den möglichen natürlich erst bei Lösung der Bewegungsgleichung, das heißt der eingangs beschriebenen Aufgabe. Aber selbst durch Einschränkungen kann man den Umfang dieser Aufgabe vermindern, was besonders willkommen sein

<sup>1)</sup> Institut für Aerodynamik, ETH.



dürfte bei der Erhöhung des Rechenaufwandes, den die Berücksichtigung der Kompressibilität mit sich bringt.

Die Methode, mit Hilfe der Arbeitsberechnung die möglichen Flutterformen zu untersuchen, ist schon von GREIDANUS, DUNCAN (inkompressible Strömung) und BARTON (Überschallströmung) angewendet worden. Anscheinend hat jedoch diese bemerkenswerte Betrachtungsweise noch keine sehr große Verbreitung gefunden, so daß sie im folgenden ausführlich dargestellt werden soll. Die Ergebnisse werden diskutiert für kleine Schwingungen in ebener Potentialströmung im ganzen Mach-Bereich von 0 bis  $\infty$ , wobei die Luftkraftkoeffizienten der vorhandenen Literatur entnommen wurden, mit Ausnahme des Sonderfalles  $M = 1$ , für den auf Grund eigener Rechnungen Tabellen der Beiwerte angeführt sind. — Die Diskussion führt zu einer von der Mach-Zahl abhängigen oberen Grenze der reduzierten Frequenz, überhalb welcher keine angefachten Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden möglich sind, und zu einer niedrigeren, im Überschallgebiet zum Teil schon bekannten Grenze für Schwingungen mit nur einem Freiheitsgrad. Die Betrachtungsweise vermittelt auch ein anschauliches Bild des Flattervorganges und der Maßnahmen, die zu seiner Verhütung getroffen werden können.

1. Die Luftkraftkoeffizienten und ihre Transformation

Im folgenden beschränken wir uns auf das Flutterproblem mit zwei Freiheitsgraden in ebener Strömung. Ein Profil der Tiefe  $l$  sei mit der Geschwindigkeit  $U$  angeblasen. Zur Kennzeichnung seiner momentanen Lage wird ein Bezugspunkt auf der Profilachse gewählt ( $P$  in Fig. 1); die Lagekoordinaten sind der Ausschlag  $y$  des Bezugspunktes und der Anstellwinkel  $\alpha$  der Nullauftriebsachse.

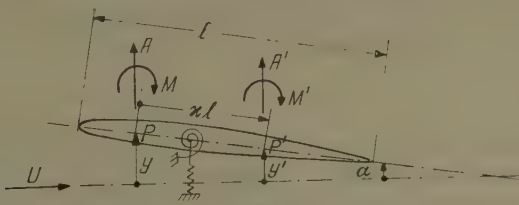


Fig. 1  
Lagekoordinaten und Luftkräfte am Profil.

Unter dem Einfluß von Luftkräften, Trägheitskräften und von elastischen Rückstellkräften, welche den Ausschlägen  $y$  und  $\alpha$  entgegenwirken, kann nun der Flügel Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden ausführen: Schlag- und Drehschwingungen. Es werden dann  $y$  und  $\alpha$  harmonische Funktionen der Zeit mit einer Kreisfrequenz  $\nu$ , komplex geschrieben:

$$y = y_0 e^{i \nu t}, \quad \alpha = \alpha_0 e^{i \nu t}. \tag{1}$$

(Um Gleichdimensionalität der Koordinaten zu haben, benützen wir später  $y/l$ .) Die Amplituden müssen im allgemeinen zur Kennzeichnung der Phasenlage komplex angenommen werden.

Die Luftkräfte können nun für die durch (1) gegebene Bewegung des Profils bei kleinen Ausschlägen in einer Potentialströmung berechnet werden, sowohl inkompressibel als auch für kompressible Medien. Als Ergebnis einer solchen Rechnung kennt man den Auftrieb  $\mathfrak{A}$  und das Moment  $\mathfrak{M}$  um den Bezugspunkt. Beide werden ebenfalls harmonische Funktionen der Zeit mit dem gleichen Zeitfaktor  $e^{i\nu t}$ ; wir benützen die entsprechenden Beiwerte:

$$c_a = \frac{\mathfrak{A}}{\varrho \bar{U}^2 l/2} = c_{a_0} e^{i\nu t}, \quad c_m = \frac{\mathfrak{M}}{\varrho \bar{U}^2 l^2/2} = c_{m_0} e^{i\nu t}. \quad (2)$$

Vorläufig brauchen wir als einziges Ergebnis, daß sich für kleine Ausschläge zwischen  $y_0$  und  $\alpha_0$  einerseits und  $c_{a_0}$  und  $c_{m_0}$  anderseits ein linearer Zusammenhang ergibt:

$$c_{a_0} = k_{ay} \frac{y_0}{l} + k_{a\alpha} \alpha_0, \quad c_{m_0} = k_{my} \frac{y_0}{l} + \bar{k}_{m\alpha} \alpha_0. \quad (3)$$

Die  $k_{ay}$  usw. sind komplexe Koeffizienten, da im allgemeinen zwischen  $y_0$ ,  $\alpha_0$  und  $c_{a_0}$ ,  $c_{m_0}$  Phasenverschiebungen bestehen; in Real- und Imaginärteil zerlegt, sollen die Koeffizienten in der Form geschrieben werden:

$$k_{ay} = k_{ayr} + i k_{ayi} \quad (3a)$$

usw. Man braucht also insgesamt acht reelle Größen, «Luftkraftkoeffizienten», um den durch die Gleichungen (3) gegebenen Zusammenhang zu beschreiben.

Für ebene kompressible Potentialströmung ergeben sich die Luftkraftkoeffizienten in Abhängigkeit von zwei Parametern:

1. die Machsche Zahl  $M$  der Anströmgeschwindigkeit,
2. die reduzierte Frequenz<sup>1)</sup>

$$\omega = \frac{\nu l}{U}. \quad (4)$$

$\omega$  läßt sich in bekannter Weise auch als geometrischer Ähnlichkeitsparameter deuten. Betrachten wir das Profil in ruhender Luft mit der Geschwindigkeit  $U$  bewegt, so ist der während einer vollen Schwingung zurückgelegte Weg  $L$  gleich

$$L = U \frac{2\pi}{\nu};$$

damit wird auch

$$\omega = 2\pi \frac{l}{L}, \quad (4a)$$

ausgedrückt durch das Verhältnis der Profiltiefe  $l$  zur «Wellenlänge»  $L$ .

<sup>1)</sup> In einem Teil der Literatur wird die mit der halben Tiefe berechnete reduzierte Frequenz benützt:  $\omega = \nu l/2 U$ .

Schließlich hängen die Werte der Luftkraftkoeffizienten auch davon ab, welchen Bezugspunkt wir gewählt haben. Wir befreien uns von dieser trivialen Abhängigkeit durch Angabe des Transformationsgesetzes beim Übergang auf einen neuen Bezugspunkt  $P'$  (Fig. 1), der ebenfalls auf der Profilachse liegen soll, jedoch gegenüber  $P$  eine Rücklage hat vom Betrage

$$\overrightarrow{PP'} = \kappa \, l.$$

Alle auf den neuen Bezugspunkt bezogenen Größen seien durch einen Strich gekennzeichnet. Ein Blick auf Fig. 1 bestätigt das folgende Transformationsgesetz für die Koordinaten (bei kleinem  $\alpha$ ):

$$y' = y - \kappa \, l \, \alpha, \quad \alpha' = \alpha \tag{5}$$

und für die Kräfte und Momente:

$$\mathcal{U}' = \mathcal{U}, \quad \mathcal{M}' = \mathcal{M} + \kappa \, l \, \mathcal{U}$$

oder mit Verwendung der Beiwerte:

$$c'_a = c_a, \quad c'_m = c_m + \kappa \, c_a. \tag{6}$$

Durch Einsetzen von (5) und (6) in (3) erhält man für die entsprechenden Amplituden

$$\begin{aligned} c'_{a_0} &= k_{ay} \frac{y'_0}{l} + (k_{a\alpha} + \kappa \, k_{ay}) \alpha'_0, \\ c'_{m_0} &= (k_{my} + \kappa \, k_{ay}) \frac{y'_0}{l} + [k_{m\alpha} + \kappa \, (k_{a\alpha} + k_{my}) + \kappa^2 \, k_{ay}] \alpha'_0, \end{aligned}$$

wodurch in Analogie zu (3) neue Luftkraftkoeffizienten  $k'_{ay}$  usw. definiert sind, für die sich das folgende Transformationsschema ergibt:

$$\left. \begin{aligned} k'_{ay} &= k_{ay}, \\ k'_{a\alpha} &= k_{a\alpha} + \kappa \, k_{ay}, \\ k'_{my} &= k_{my} + \kappa \, k_{ay}, \\ k'_{m\alpha} &= k_{m\alpha} + \kappa \, (k_{a\alpha} + k_{my}) + \kappa^2 \, k_{ay}. \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

Die Gleichungen gelten sowohl für die Real- als auch für die Imaginärteile.

2. Das komplexe Amplitudenverhältnis

Die Benützung unnötig vieler komplexer Größen wird vermieden, wenn man das Amplitudenverhältnis

$$\zeta = \frac{y_0}{\alpha_0 \, l} \tag{8}$$

in die Gleichungen (3) einführt;  $\zeta$  selbst ist im allgemeinen komplex:

$$\zeta = \xi + i \eta \quad (8a)$$

( $\xi, \eta$  reell). Schreiben wir nun (3) in der Form

$$c_{a_0} = \alpha_0 (k_{ay} \zeta + k_{a\alpha}), \quad c_{m_0} = \alpha_0 (k_{my} \zeta + k_{m\alpha}), \quad (9)$$

so bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die Phasenlage so normieren, daß  $\alpha_0$  rein reell wird. Dies soll fortan vorausgesetzt werden.

Zur übersichtlicheren Gestaltung der späteren Rechnung setzen wir in (9)

$$k_{ay} \zeta + k_{a\alpha} = h_a, \quad k_{my} \zeta + k_{m\alpha} = h_m, \quad (10)$$

wobei wieder

$$h_a = h_{ar} + i h_{ai}, \quad h_m = h_{mr} + i h_{mi} \quad (10a)$$

geschrieben wird. Durch Identifikation von Real- und Imaginärteil in den Gleichungen (10) erhält man mit den Bezeichnungen von (3a), (8a) und (10a):

$$\left. \begin{aligned} h_{ar} &= k_{ayr} \xi - k_{ayi} \eta + k_{a\alpha r}, \\ h_{ai} &= k_{ayi} \xi + k_{ayr} \eta + k_{a\alpha i}, \\ h_{mr} &= k_{myr} \xi - k_{myi} \eta + k_{m\alpha r}, \\ h_{mi} &= k_{myi} \xi + k_{myr} \eta + k_{m\alpha i}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Real- und Imaginärteil des komplexen Amplitudenverhältnisses gestatten nun eine einfache geometrische Deutung, die schon von KASSNER und FINGADO [1]<sup>1)</sup> angegeben wurde. Wir bemerken zunächst, daß nach (5) für  $\zeta$  das folgende Transformationsgesetz gilt:

$$\zeta' = \zeta - \kappa \quad (12)$$

oder

$$\xi' = \xi - \kappa, \quad (12a)$$

$$\eta' = \eta. \quad (12b)$$

Der Imaginärteil  $\eta$  ist also eine Invariante. Wenn wir nun einen neuen Bezugspunkt wählen derart, daß seine (auf die Länge  $l$  bezogene) Rücklage  $\kappa = \xi$  ist, so wird wegen (12a) das Amplitudenverhältnis rein imaginär. Diesen neuen Bezugspunkt nennen wir nach KASSNER und FINGADO den «Knotenpunkt».

Für den Ausschlag  $y_K$  des Knotenpunktes und den Winkel  $\alpha_K = \alpha$  (invariant) gilt also

$$\frac{y_{K_0}}{\alpha_0 l} = i \eta$$

oder

$$y_K = i \alpha_0 l \eta e^{i \nu t}, \quad \alpha = \alpha_0 e^{i \nu t}.$$

<sup>1)</sup> Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf S. 410.



Im Knotenpunkt besteht zwischen Ausschlag und Verdrehung eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$ , reell geschrieben:

$$y_K = -\alpha_0 l \eta \sin \nu t, \quad \alpha = \alpha_0 \cos \nu t.$$

Betrachten wir nun die absolute Bahn des Knotenpunktes vom Standpunkt der ruhenden Luft durch Einführung des Weges  $s = U t$ , den das Profil während der Zeit  $t$  zurücklegt. Es ist mit Verwendung der reduzierten Frequenz nach (4)

$$y_K = -\alpha_0 l \eta \sin \omega \frac{s}{l}. \quad (13)$$

Die Anstellung des Profils ist analog in Funktion von  $s$  gegeben durch

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega \frac{s}{l}. \quad (14)$$

Die Neigung  $\beta$  der Knotenpunktbahn ist nun gleich

$$\beta = \frac{dy_K}{ds} = -\alpha_0 \omega \eta \cos \omega \frac{s}{l}. \quad (15)$$

Aus (14) und (15) folgt (mit  $\beta_0$  = Amplitude von  $\beta$ )

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_0}{\alpha_0} = -\omega \eta, \quad (16)$$

das heißt Neigung des Profils und Neigung der absoluten Bahn haben für den Knotenpunkt die gleiche Phase; das Verhältnis der Amplituden dieser Neigungen ist durch  $\omega$  und  $\eta$  nach (16) gegeben.

Durch die drei Größen  $\omega$ ,  $\xi$  und  $\eta$  ist eine Schwingungsform (bis auf einen Proportionalitätsfaktor  $\alpha_0$ ) eindeutig festgelegt. Fig. 2a zeigt folgendes Beispiel: Bezugspunkt sei die Profilmitte, und es ist  $\omega = 1$ ,  $\xi = -0,5$  und  $\eta = -0,5$  angenommen. Aufgezeichnet ist die absolute Bahn des Knotenpunktes, der wegen  $\xi = -0,5$  auf der Profilverdrehung liegt. Aus  $\omega$  folgt das Verhältnis der Profiltiefe zur Wellenlänge, für  $\omega = 1$ :  $l = L/2\pi$ . Die Neigung des Profils ist überall proportional zur Knotenbahnneigung, sie ist also Null, wenn  $y_K$  maximal ist, und hat den größten Wert für  $y_K = 0$ . Das Verhältnis der Amplituden, das im Punkt  $y_K = 0$  abgelesen werden kann, ist in unserem Beispiel nach (16)

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = -\omega \eta = 0,5.$$

Ein anderes Beispiel sei  $\omega = 1$ ,  $\xi = -0,5$ ,  $\eta = 0$ . Wegen  $\eta = 0$  ist nach (13)  $y_K \equiv 0$  und  $\beta \equiv 0$ . Man sieht, daß in diesem Sonderfall der Knotenpunkt zum Drehpunkt einer reinen Torsionsschwingung wird (Fig. 2b). Reine Schlag-schwingung ist der «Sonderfall des Sonderfalles» mit dem Drehpunkt im Unendlichen, also  $\eta = 0$ ,  $\xi = \pm \infty$ .

Um die Bedeutung von positiven  $\eta$ -Werten zu zeigen, ist noch ein Beispiel mit  $\omega = 1$ ,  $\xi = -0,5$ ,  $\eta = 0,5$  in Fig. 2c dargestellt.

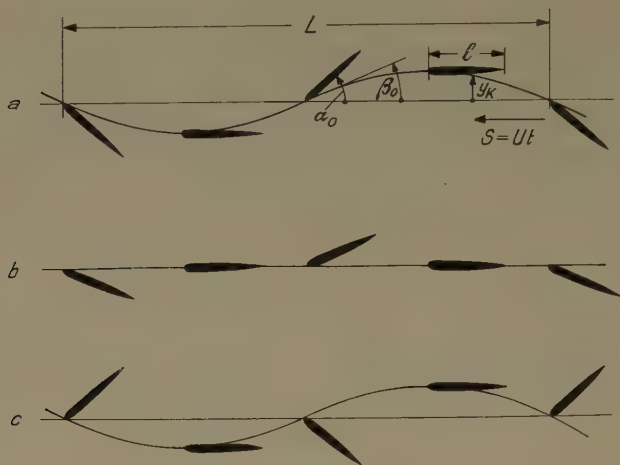


Fig. 2

Flügel-schwingungsformen, dargestellt durch die Lage des Profils an verschiedenen Stellen der Knotenpunkt-bahn. Kennzeichnende Größen (Bezugspunkt: Profilmitt):

$$a) \omega = 1; \xi = -0,5; \eta = -0,5$$

$$b) \omega = 1; \xi = -0,5; \eta = 0$$

$$c) \omega = 1; \xi = -0,5; \eta = 0,5$$

### 3. Die Arbeitsleistung der Luftkräfte

Die Frage, wann die Luftkräfte und Momente dämpfend oder anfachend wirken, läßt sich nicht durch einen Blick auf die Gleichungen (3) beantworten. Die Antwort hängt ab von der Phasenlage von  $c_{a_0}$  und  $c_{m_0}$  gegen  $\gamma_0$  und  $\alpha_0$ , und diese wird unübersichtlich, wenn die  $k_{a_y}$  usw. komplex sind und die Ausschläge ein komplexes Verhältnis haben. Es muß deshalb, wie schon einleitend bemerkt wurde, die Arbeitsleistung der Luftkräfte ausgerechnet werden. Die momentane Arbeitsleistung ist allgemein:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= (\text{Kraft}) \cdot (\text{Geschwindigkeit des Aufpunktes}) \\ &+ (\text{Moment um den Aufpunkt}) \cdot (\text{Winkelgeschwindigkeit}) \\ &\mathfrak{A} \dot{\gamma} + \mathfrak{M} \dot{\alpha} \end{aligned}$$

oder mit den Luftkraftbeiwerten nach (2):

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \varrho U^2 l^2 \left( c_a \frac{\dot{\gamma}}{l} + c_m \dot{\alpha} \right). \quad (17)$$

Dabei ist nach (1) und (8)

$$\dot{y} = i \nu y_0 e^{i \nu t} = i \nu \alpha_0 l \xi e^{i \nu t}, \quad \dot{\alpha} = i \nu \alpha_0 e^{i \nu t}. \quad (18)$$

Die  $c_a$  und  $c_m$  seien in der durch (9) und (10) definierten Form benützt:

$$c_a = \alpha_0 h_a e^{i \nu t}, \quad c_m = \alpha_0 h_m e^{i \nu t}. \quad (19)$$

Bei der Ausrechnung von  $\mathcal{Q}$  muß man bekanntlich wieder auf die reelle Schreibweise übergehen, das heißt von den Ausdrücken (18) und (19) ist der Realteil zu nehmen unter Berücksichtigung der Normierung, daß  $\alpha_0$  rein reell ist. Mit den Bezeichnungen von (8a) und (10a) wird reell geschrieben:

$$\frac{\dot{y}}{l} = -\nu \alpha_0 (\eta \cos \nu t + \xi \sin \nu t), \quad \dot{\alpha} = -\nu \alpha_0 \sin \nu t, \quad (18a)$$

$$c_a = \alpha_0 (h_{ar} \cos \nu t - h_{ai} \sin \nu t), \quad c_m = \alpha_0 (h_{mr} \cos \nu t - h_{mi} \sin \nu t). \quad (19a)$$

Man erhält  $\mathcal{Q}$  nach Einsetzen von (18a) und (19a) in (17). Sehr einfach wird der Ausdruck für die mittlere Leistung  $\bar{\mathcal{Q}}$ , der sich unter Berücksichtigung der Mittelwerte

$$\overline{\cos^2 \nu t} = \overline{\sin^2 \nu t} = \frac{1}{2}, \quad \overline{\cos \nu t \sin \nu t} = 0$$

ergibt:

$$\bar{\mathcal{Q}} = \frac{1}{4} \rho U^2 l^2 \nu \alpha_0^2 (-\eta h_{ar} + \xi h_{ai} + h_{mi}).$$

Wir definieren nun einen «Leistungsbeiwert»  $\lambda$  gemäß

$$\lambda = \frac{\bar{\mathcal{Q}}}{\rho U^3 l \alpha_0^2 / 4} = \omega (-\eta h_{ar} + \xi h_{ai} + h_{mi}). \quad (20)$$

Durch Einsetzen von  $h_{ar}$  usw. nach (11) in (20) ergibt sich nach leichter Umformung:

$$\lambda = \omega \{ k_{ayi} (\xi^2 + \eta^2) + (k_{myi} + k_{a\alpha i}) \xi + (k_{myr} - k_{a\alpha r}) \eta + k_{mai} \}. \quad (21)$$

Die Gleichung (21) gestattet die Berechnung des Leistungsbeiwertes für eine gegebene Schwingungsform, gekennzeichnet durch  $\omega$ ,  $\xi$  und  $\eta$ , wenn die Luftkoeffizienten bekannt sind, die selber von  $\omega$  und der Mach-Zahl abhängen. Explizit ersichtlich ist jedoch in (21) die Abhängigkeit des Leistungsbeiwertes von  $\xi$  und  $\eta$ : es ist  $\lambda$  eine quadratische Form in  $\xi$  und  $\eta$ .

Ist  $\lambda$  positiv, so wird von den Luftkräften während einer vollen Schwingung im Mittel Arbeit geleistet, die entsprechende Schwingungsform ist also angefaßt, während umgekehrt negatives  $\lambda$  Dämpfung bedeutet. Im besonderen Falle  $\lambda = 0$  tritt weder Dämpfung noch Anfachung ein. Wird die innere (mechanische) Dämpfung vernachlässigt, wie es meistens bei Schwingungs-

rechnungen der Fall ist (um auf der sicheren Seite zu stehen), so wird durch die Gleichung  $\lambda = 0$  eine Schwingungsform festgelegt, wie sie gerade im «kritischen» Zustand des Flügelflatterns möglich ist. Man sieht aus (21), daß  $\lambda = 0$  als Gleichung zwischen  $\xi$  und  $\eta$  (mit den Parametern  $\omega$  und  $M$ ) durch einen Kreis in der  $(\xi, \eta)$ -Ebene dargestellt wird. Zur vollständigen Diskussion setzen wir unter der Voraussetzung  $k_{ay i} \neq 0$ :

$$\lambda = \omega k_{ay i} \{ (\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2 - r^2 \}, \quad (22)$$

wodurch die Mittelpunktskoordinaten  $\xi_m$ ,  $\eta_m$  und der Radius  $r$  des «Grenzkreises»  $\lambda = 0$  definiert sind. Nach Identifikation mit (21) erhalten wir ausgedrückt durch die Luftkraftkoeffizienten:

$$\xi_m = - \frac{k_{a\alpha i} + k_{m\gamma i}}{2 k_{ay i}}, \quad (23)$$

$$\eta_m = \frac{k_{a\alpha r} - k_{m\gamma r}}{2 k_{ay i}}, \quad (24)$$

$$r = \sqrt{\xi_m^2 + \eta_m^2 - \frac{k_{m\alpha i}}{k_{ay i}}}. \quad (25)$$

Man sieht aus der Gleichung (22), daß  $\lambda$  für  $\xi = \xi_m$  und  $\eta = \eta_m$  ein Extremum hat, nämlich

$$\lambda_m = -\omega k_{ay i} r^2. \quad (26)$$

Vor der weiteren Diskussion sei bemerkt, daß beim Übergang zu einem anderen Bezugspunkt nach den Gleichungen (7) die folgenden Transformationsgesetze gelten:

$$\xi'_m = \xi_m - \kappa, \quad \eta'_m = \eta_m, \quad r' = r, \quad (27)$$

und da  $k_{ay i}$  nach (7) invariant ist, wird

$$\lambda'_m = \lambda_m. \quad (27a)$$

Es ist also allein  $\xi_m$  keine Invariante, transformiert sich jedoch in anschaulicher Übereinstimmung mit der Gleichung (12a). Die Lage des durch  $\xi_m$  festgelegten Knotenpunktes relativ zum Profil ist also auch invariant. Bei Beachtung von (27) ist es somit gleichgültig, von welchem Bezugspunkt ausgehend die Luftkraftkoeffizienten in die Gleichungen (23) bis (26) eingesetzt werden.

Ein reeller Grenzkreis  $\lambda = 0$  ergibt sich nur in dem Falle, wenn der Ausdruck unter der Wurzel (25) positiv ist. Wird  $r$  imaginär,  $r^2 < 0$ , so kann für alle  $\xi$  und  $\eta$  nur Dämpfung oder nur Anfachung eintreten: die quadratische Form  $\lambda$  ist definit. Welcher der beiden Fälle wirklich vorkommt, sieht man am Vorzeichen des Extremwertes  $\lambda_m$  in (26), wobei also auch das Vorzeichen von  $k_{ay i}$  eine Rolle spielt. Es sind insgesamt vier Fälle zu unterscheiden:



I.  $r^2 < 0$ : der Grenzkreis  $\lambda = 0$  existiert nicht.

A.  $k_{ayi} < 0$ ,  $\lambda_m < 0$ : überall Dämpfung.

B.  $k_{ayi} > 0$ ,  $\lambda_m > 0$ : überall Anfachung.

Wenn der Grenzkreis existiert, so entscheidet  $\lambda_m$  das Vorzeichen von  $\lambda$  innerhalb des Kreises:

II.  $r^2 > 0$ : der Grenzkreis  $\lambda = 0$  existiert.

A.  $k_{ayi} < 0$ ,  $\lambda_m > 0$ : Anfachung innerhalb, Dämpfung außerhalb des Grenzkreises.

B.  $k_{ayi} > 0$ ,  $\lambda_m < 0$ : Dämpfung innerhalb, Anfachung außerhalb des Grenzkreises.

Es ist nun eine Besonderheit der Luftkraftkoeffizienten, die später noch diskutiert werden soll, daß  $k_{ayi}$  immer negativ ist. Darin kommt die bekannte Tatsache zum Ausdruck, daß reine Schlagschwingungen immer gedämpft sind, zumindest in Potentialströmung. Es kommen also nur die Fälle IA und IIA in Frage: Anfachung tritt nur ein innerhalb des Grenzkreises, wenn dieser existiert; wenn er nicht existiert, so ist die Schwingung immer gedämpft, und ein imaginärer Radius  $r$  ergibt sich als «hinreichendes» Kriterium für Flutterfreiheit:

$$r^2 = \left( \frac{k_{axi} + k_{myi}}{2 k_{ayi}} \right)^2 + \left( \frac{k_{axr} - k_{myr}}{2 k_{ayi}} \right)^2 - \frac{k_{mai}}{k_{ayi}} < 0. \quad (28)$$

[Vgl. (23), (24) und (25). Wegen  $k_{ayi} < 0$  kann die Bedingung (28) nur für  $k_{mai} < 0$  erfüllt werden.]

Wird die innere Dämpfung mitberücksichtigt, so kann man sagen, daß die im kritischen Zustand möglichen Werte von  $\xi$  und  $\eta$  innerhalb des Grenzkreises liegen müssen, denn nur diesen Punkten entspricht eine Schwingungsform, in der die Luftkräfte die zur Überwindung der inneren Dämpfung nötigen Arbeit leisten können.

Die Anwendung der Resultate wird äußerst einfach: die Luftkraftkoeffizienten sind in Funktion von  $\omega$  und  $M$  in verschiedenen Abhandlungen berechnet und tabelliert worden. Mittelpunkt und Radius des Grenzkreises ergeben sich nach Einsetzen in die Gleichungen (23) bis (25) in Funktion von  $\omega$  und  $M$ .

Es läßt sich zum Beispiel mit dieser Methode sofort entscheiden, ob für ein gewisses  $\omega$  und  $M$  reine Torsionsschwingungen möglich sind oder nicht. Nach dem früher Gesagten sind diese Formen durch  $\eta = 0$  gekennzeichnet. Es kommt also nur darauf an, ob der Grenzkreis die Achse  $\eta = 0$  ( $\xi$ -Achse) schneidet. Die Bedingung für die Existenz von solchen (zwei) Schnittpunkten ist offenbar

$$r > |\eta_m| \quad (29)$$

oder nach (25)

$$\xi_m^2 - \frac{k_{mai}}{k_{ayi}} > 0. \quad (30)$$

Wenn die zwei Schnittpunkte existieren, so gibt der zwischenliegende Abschnitt der  $\xi$ -Achse Aufschluß über die möglichen Drehpunkte einer reinen angefachten Torsionsschwingung.

Zur Verdeutlichung sei noch eine andere Herleitung der Bedingung (30) gegeben. Wenn mit einer Rücklage  $\xi l$  gegen den Bezugspunkt ein Drehpunkt reiner Torsionsschwingung möglich sein soll, können Aussagen am besten gemacht werden nach Umrechnung der Luftkraftkoeffizienten auf den Drehpunkt als Bezugspunkt. Dies geschieht nach den Formeln (7) mit  $\kappa = \xi$ . Angefacht wird eine solche Schwingung dann, wenn das Moment der Luftkräfte, welches in Phase mit der Winkelgeschwindigkeit ist, einen positiven Koeffizienten hat. Das heißt aber, daß  $k'_{m\alpha i} > 0$  sein muß, also nach (7)

$$k'_{m\alpha i} = k_{m\alpha i} + \xi (k_{a\alpha i} + k_{myi}) + \xi^2 k_{ay i} > 0.$$

Als Funktion von  $\xi$  ist  $k'_{m\alpha i}$  eine Parabel. Es wurde  $k_{ay i} < 0$  vorausgesetzt, so daß für  $\xi = \pm \infty$   $k'_{m\alpha i} < 0$  wird: reine Schlagschwingungen sind gedämpft. Ob diese Parabel überhaupt in das positive Gebiet eindringt, kann am besten am Vorzeichen seines Scheitelwertes beurteilt werden: es ist

$$\frac{dk'_{m\alpha i}}{d\xi} = 0$$

für

$$\xi = -\frac{k_{a\alpha i} + k_{myi}}{2 k_{ay i}} = \xi_m,$$

also gerade für  $\xi = \xi_m$ . Der Wert von  $k'_{m\alpha i}$  ist dort

$$k'_{m\alpha i}(\xi = \xi_m) = k_{m\alpha i} - k_{ay i} \xi_m^2.$$

Wir haben also die Bedingung für Anfachungsmöglichkeit einer reinen Torsionsschwingung:

$$k_{m\alpha i} - k_{ay i} \xi_m^2 > 0,$$

was bei negativem  $k_{ay i}$  mit (30) in Übereinstimmung steht.

Die bisherigen Anwendungen der Methode, mit Hilfe der Arbeitsberechnung die möglichen Flutterformen zu untersuchen, sind schon eingangs erwähnt worden. GREIDANUS [2] hat eine sehr vollständige Diskussion für inkompressible Strömung gegeben. DUNCAN [16] veranschaulicht die Schwingungsformen mit Arbeitsaufnahme und -abgabe durch eine «Fluttermaschine». BARTON [3] behandelt Flattern in Überschallströmung. In den genannten Arbeiten ist übrigens das komplexe Amplitudenverhältnis durch Betrag und Argument gekennzeichnet:

$$\zeta = |\zeta| e^{i\psi}.$$

Der Zusammenhang mit unserer Bezeichnungsweise ist

$$\xi = |\zeta| \cos \psi, \quad \eta = |\zeta| \sin \psi.$$

Die Benützung von  $\xi$  und  $\eta$  hat den Vorteil, daß wenigstens  $\eta$  eine Invariante ist und auch  $\xi$  eine anschaulich verständliche Abhängigkeit vom Bezugspunkt hat. Auch die Kennzeichnung der Schwingungsform durch  $\xi$  und  $\eta$  sowie der «Grenzkreis» in der  $(\xi, \eta)$ -Ebene sind besonders einprägsam.

#### 4. Quellen für die numerischen Werte der Luftkraftkoeffizienten

##### a) Unterschallströmung

Im Sonderfall der Schwingungen in inkompressibler Strömung sind die Luftkräfte wohl bekannt; die zu ihrer Berechnung benötigten Funktionen der reduzierten Frequenz sind zum Beispiel bei KASSNER und FINGADO [1] tabelliert.

Für die kompressible Unterschallströmung wurden in den folgenden Rechnungen die nach der Methode von DIETZE [4] aufgestellten Tabellen benützt. DIETZE erhält die Luftkräfte ausgehend vom bekannten Sonderfall  $M = 0$  mit Hilfe einer Iterationsmethode, die allerdings um so schlechter konvergiert, je näher  $M$  an 1 herankommt und je höher die reduzierte Frequenz ist.

##### b) Überschallströmung

Für  $M > 1$  lassen sich die Luftkräfte in geschlossener Form angeben; es sei hier auf die Arbeiten von POSSIO [5], v. BORBÉLY [6], SCHWARZ [7], HÖNL [9], TEMPLE und JAHN [9], GARRICK und RUBINOW [10], MILES [11] hingewiesen. Ausführliche Tabellen finden sich bei TEMPLE und JAHN [9], GARRICK und RUBINOW [10] sowie bei BARTON [3]; über den Zusammenhang der hier verwendeten Luftkraftkoeffizienten mit der Bezeichnungsweise dieser Arbeiten orientiert die Tabelle 4. Bei den folgenden Rechnungen wurde das von TEMPLE und JAHN und von BARTON gegebene Zahlenmaterial benützt.

Es sollen noch die Luftkraftkoeffizienten für  $M > 1$  in zwei Sonderfällen angeführt werden. Zunächst die «quasistationären» Grenzwerte für sehr kleine Werte der reduzierten Frequenz  $\omega$ , wobei für die Realteile die nullten, für die Imaginärteile die ersten Potenzen von  $\omega$  beibehalten worden sind. Nach den Ergebnissen der oben angeführten Arbeiten ergibt sich in unserer Bezeichnungsweise mit der Profilmittte als Bezugspunkt:

$$\left. \begin{aligned} k_{a\gamma r} &= 0, & k_{a\gamma i} &= -\frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \omega, \\ k_{a\alpha r} &= \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}}, & k_{a\alpha i} &= -\frac{2}{(\sqrt{M^2 - 1})^3} \omega, \\ k_{m\gamma r} &= 0, & k_{m\gamma i} &= 0, \\ k_{m\alpha r} &= 0, & k_{m\alpha i} &= -\frac{M^2 - 2}{3(\sqrt{M^2 - 1})^3} \omega. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Weiterhin seien die asymptotischen Funktionen angeführt, welche die Luftkraftkoeffizienten für große  $\omega \rightarrow \infty$  darstellen. Man findet

$$\left. \begin{aligned} k_{a\gamma r} &= 0, & k_{a\gamma i} &= -\frac{4}{M} \omega, \\ k_{a\alpha r} &= \frac{4}{M}, & k_{a\alpha i} &= 0, \\ k_{m\gamma r} &= 0, & k_{m\gamma i} &= 0, \\ k_{m\alpha r} &= 0, & k_{m\alpha i} &= -\frac{1}{3M} \omega. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Ein Vergleich der Werte (31) und (32) zeigt, daß für große Mach-Zahlen  $M \rightarrow \infty$  die Luftkraftkoeffizienten sehr angenähert durch die gleichen Funktionen dargestellt werden sowohl im Grenzfall  $\omega \rightarrow 0$  als auch für  $\omega \rightarrow \infty$ . Es liegt die Vermutung nahe, daß dann auch im ganzen Bereich der reduzierten Frequenz die einfachen Formeln (32) eine gute Näherung darstellen. Dies ist auch tatsächlich der Fall. Für  $M$ -Werte nahe an 1 zeigen zwar die Luftkraftkoeffizienten, die geschlossen durch Besselsche und trigonometrische Funktionen ausgedrückt werden können, sehr starke Schwankungen über  $\omega$ . Mit größer werden der Mach-Zahl glätten sich jedoch die Verläufe, und von etwa  $M = 2$  an können die Formeln (32) schon in vielen Fällen als gute Näherung verwendet werden. Sie lassen sich nach COLLAR [12] elementar durch eine quasistationäre Rechnung finden, deren Berechtigung aber — wie TEMPLE und JAHN [9] hervorgehoben haben — auf hohe Mach-Zahlen beschränkt ist<sup>1)</sup>. Auch die Schwingungsrechnung wird mit den Werten (32) besonders einfach.

### c) Schallströmung ( $M = 1$ )

Im Sonderfall  $M = 1$  sind eigene Rechnungen durchgeführt worden<sup>2)</sup>. Nachdem schon in einer kurzen Mitteilung die Methode zur Bestimmung der Druckverteilung bei  $M = 1$  dargestellt worden ist [13], mußten noch die Luftkräfte und Momente durch eine Reihe von Integrationen ausgerechnet werden. Diese Operationen stehen in vollständiger Analogie zu den schon mehrfach dargestellten Rechnungen für  $M > 1$ , so daß auf ihre Wiedergabe hier verzichtet werden soll. Es seien nur die Resultate angegeben, und es soll gezeigt werden, daß diese von den bekannten Ergebnissen für  $M > 1$  durch einen Grenzübergang gefunden werden können.

Die analytischen Ausdrücke für die Luftkraftkoeffizienten sind in der Tabelle 1 zusammengestellt. Tabelle 2 gibt die Grenzwerte für kleine Werte von  $\omega$ .

<sup>1)</sup> In neuester Zeit ist von SAUER [17] eine elementare Herleitung der für alle Mach-Zahlen gültigen quasistationären Werte (31) angegeben worden.

<sup>2)</sup> Während der Drucklegung dieser Arbeit wurde dem Autor bekannt, daß eine Abhandlung von HEASLET, LOMAX und SPREITER [18] das gleiche Thema behandelt.



Für  $\omega \rightarrow \infty$  gelten die Formeln (32) mit  $M = 1$ . Tabelle 3 enthält die numerischen Werte (vgl. auch Fig. 3).

Beim Grenzübergang gegen  $M = 1$  von der Überschallseite her geht man am besten in zwei Schritten vor. Im ersten — elementaren — Schritt wird überall  $M = 1$  gesetzt, wo dies ohne «Gefahr» möglich ist, das heißt, wo wegen

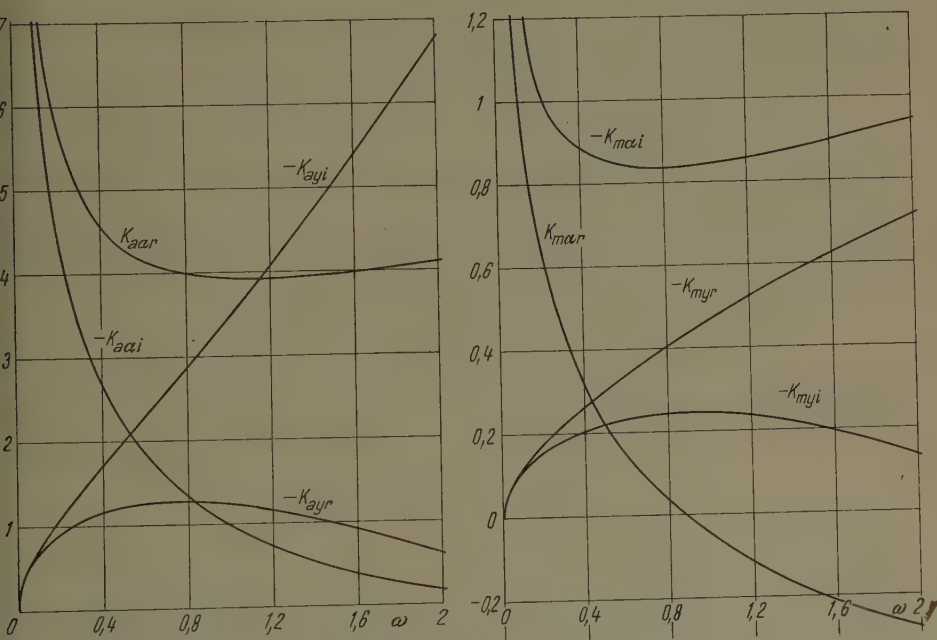


Fig. 3

Luftkraftkoeffizienten für  $M = 1$ . Bezugspunkt: Profilmittte.

$M = 1$  keine Größe unendlich wird. Als Ergebnis dieses Schrittes erhalten die Luftkraftkoeffizienten schon den genau gleichen Aufbau wie in der Tabelle 1, nur haben noch die Funktionen  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  eine andere Bedeutung. Ausgehend zum Beispiel von den Resultaten von TEMPLE und JAHN [9] findet man sie leicht (unter Beachtung der Zusammenhänge der Tabelle 4) in folgender Form: mit der Abkürzung

$$\frac{\omega M}{M^2 - 1} = z \quad (33)$$

wird

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \{ J_0(z) \sin(Mz) - J_1(z) \cos(Mz) \}, \\ G_2 &= \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \{ J_0(z) \cos(Mz) + J_1(z) \sin(Mz) \}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{\omega}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_0^1 J_0(z u) \sin(M z u) du, \\ F_2 &= \frac{\omega}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_0^1 J_0(z u) \cos(M z u) du. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Für  $M$  nahe an 1 ist nun  $z$  nach (33) groß, und die Bessel-Funktionen können durch die Hankelsche asymptotische Darstellung approximiert werden:

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right), \quad J_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right). \quad (36)$$

Der Grenzwert von  $G_1$  zum Beispiel folgt dann durch Einsetzen von (36) in (34):

$$G_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi z (M^2 - 1)}} \left\{ \sin(M z) \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \cos(M z) \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \right\},$$

woraus nach einfacher trigonometrischer Umformung folgt

$$G_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi z (M^2 - 1)}} \sin\left[(M - 1) z + \frac{\pi}{4}\right],$$

und schließlich wird nach Einsetzen von  $z$

$$G_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi \omega M}} \sin\left(\frac{\omega M}{M + 1} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Dies geht für  $M = 1$  in den Ausdruck über, der in der Tabelle 1 gegeben ist. Für  $G_2$  ist die Rechnung ganz analog.

Beim Grenzübergang für  $F_1$  und  $F_2$  ist zu beachten, daß in die Integrale, die von der Grenze 0 ausgehen, die asymptotischen Formeln nicht eingesetzt werden dürfen. Eine einfache Umgehung dieser Schwierigkeit soll am Beispiel von  $F_1$  gezeigt werden: nach Einführung der neuen Variablen  $z u = v$  wird

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \int_0^z J_0(v) \sin(M v) dv \\ &= \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \left\{ \int_0^\infty J_0(v) \sin(M v) dv - \int_z^\infty J_0(v) \sin(M v) dv \right\}. \end{aligned}$$

Das bestimmte Integral zwischen 0 und  $\infty$  hat den bekannten Wert  $1/\sqrt{M^2 - 1}$ . (Vergleiche zum Beispiel die Untersuchungen über die Integrale vom Typus (35) von SCHWARZ [14].) Im zweiten Integral kann die asymptotische Formel (36) eingesetzt werden:

$$F_1 = \frac{1}{M} - \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \int_z^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi v}} \cos\left(v - \frac{\pi}{4}\right) \sin(M v) dv.$$

Nach einer einfachen Umformung der trigonometrischen Funktionen wird

$$F_1 = \frac{1}{M} - \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \int_z^\infty \sin \left[ (M - 1) v + \frac{\pi}{4} \right] \frac{dv}{\sqrt{2 \pi v}} - \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \int_z^\infty \sin \left[ (M + 1) v - \frac{\pi}{4} \right] \frac{dv}{\sqrt{2 \pi v}}.$$

Mit den neuen Variablen  $(M - 1) v = t$  und  $(M + 1) v = s$  erhält man

$$F_1 = \frac{1}{M} - \frac{\sqrt{M + 1}}{M} \int_{s(M-1)}^\infty \sin \left( t + \frac{\pi}{4} \right) \frac{dt}{\sqrt{2 \pi t}} - \frac{\sqrt{M - 1}}{M} \int_{s(M+1)}^\infty \sin \left( s - \frac{\pi}{4} \right) \frac{ds}{\sqrt{2 \pi s}}.$$

Für  $M = 1$  wird nach Einsetzen von  $z$  in Übereinstimmung mit dem Ausdruck in der Tabelle 1:

$$F_1 = 1 - \int_{\omega/2}^\infty (\sin t + \cos t) \frac{dt}{\sqrt{2 \pi t}} = \int_0^{\omega/2} (\sin t + \cos t) \frac{dt}{\sqrt{2 \pi t}},$$

denn es ist der bekannte Grenzwert der Fresnelschen Integrale zwischen den Grenzen 0 und  $\infty$ :

$$\int_0^\infty \sin t \frac{dt}{\sqrt{2 \pi t}} = \int_0^\infty \cos t \frac{dt}{\sqrt{2 \pi t}} = \frac{1}{2}.$$

Die Luftkraftkoeffizienten für  $M = 1$  sind in Fig. 3 aufgetragen; sie zeigen über  $\omega$  einen glatten Verlauf. Die benachbarten Verläufe  $M > 1$  hingegen weisen über  $\omega$  rasche Schwankungen auf. Dazu sei bemerkt, daß beim Grenzübergang gegen  $M = 1$  von der Überschallseite her Glieder vom Typus

$$(M - 1) \sin \frac{\omega M}{M - 1}$$

zum Verschwinden kommen. Der Durchgang bei  $M = 1$  erfolgt also über  $M$  mit immer rascher und kleiner werdenden Schwankungen. Für große  $\omega$ -Werte ist allerdings das Schwankungsgebiet praktisch sehr klein. Bei Verkleinerung von  $\omega$  wird man aber zu erhöhten Schwankungen und schließlich im Grenzfall  $\omega = 0$  zu Diskontinuitäten der Luftkraftkoeffizienten bei  $M = 1$  geführt. Mathematisch sind diese wegen Divergenz der asymptotischen Formeln bei  $\omega = 0$  verständlich. Es kommen damit bekannte Änderungen der Strömung beim Schalldurchgang zum Ausdruck: zum Beispiel ist der stationäre Kraftangriffspunkt im Unterschallbereich der vordere Viertelpunkt, bei Überschall die Profilmitte, während für  $M = 1$  die (unendliche) stationäre Luftkraft in ebener Strömung nach linearisierter Theorie in  $1/3$ -Profiltiefe angreift [13].

Wenn man aber das Gebiet in der Nähe von  $\omega = 0$  von der Benützung ausschließt (wozu noch weitere Gründe angeführt werden sollen), so können die Luftkraftkoeffizienten für  $M = 1$  gewissermaßen als Mittelwerte im schallnahen Gebiet angesehen werden. Der erforderliche Rechenaufwand für eine Schwingungsrechnung in der Umgebung von  $M = 1$  wäre dadurch erheblich vermindert.

Bei Verwendung der Luftkraftkoeffizienten für  $M = 1$  sind vor allem zwei physikalisch begründete Einwände zu beachten:

1. Es kann bezweifelt werden, daß die Ergebnisse einer linearisierten Theorie für  $M = 1$  brauchbar sind. Die Untersuchungen von LIN, REISSNER und TSIEN [15] haben gezeigt, daß die Linearisierung selbst für  $M = 1$  zulässig wird, wenn in der Potentialgleichung die linearen nichtstationären Glieder gegen die vernachlässigten quadratischen Glieder überwiegen, das heißt, wenn die Schwingung genügend rasch, die reduzierte Frequenz genügend hoch ist. Es kommt darauf an, daß der Wert  $\omega/\tau^{2/3}$  groß genug wird, wobei  $\tau$  ein «Dickenparameter» ist (prozentuelle Dicke oder Anstellwinkel des Profils).

2. In der näheren Umgebung von  $M = 1$  versagt die sogenannte Streifenmethode, das heißt wenn der wirkliche Flügel endliche Spannweite hat, so ist die Betrachtung der ebenen Strömung eine unzulässige Idealisierung. Die Übertragung der folgenden Resultate auf den dreidimensionalen Fall ist in der Umgebung von  $M = 1$  nicht ohne weiteres zulässig.

Tabelle 1

Die Luftkraftkoeffizienten für  $M = 1$ . Bezugspunkt: Profilmittte

$$k_{a\gamma r} = -4 \omega (G_1 - F_2)$$

$$k_{a\gamma i} = -4 \omega (G_2 + F_1)$$

$$k_{a\alpha r} = 4 (G_2 + F_1) + 2 \left( \frac{F_2}{\omega} - G_2 \right)$$

$$k_{a\alpha i} = -4 (G_1 - F_2) + 2 \left( G_1 - \frac{F_1}{\omega} \right)$$

$$k_{m\gamma r} = -2 \left( \frac{F_2}{\omega} - G_2 \right)$$

$$k_{m\gamma i} = -2 \left( G_1 - \frac{F_1}{\omega} \right)$$

$$k_{m\alpha r} = -\frac{\omega}{3} (G_1 - F_2) - \frac{2}{\omega} \left( G_1 - \frac{F_1}{\omega} \right) + \frac{4}{3} G_2$$

$$k_{m\alpha i} = -\frac{\omega}{3} (G_2 + F_1) + \frac{2}{\omega} \left( \frac{F_2}{\omega} - G_2 \right) - \frac{4}{3} G_1$$

dabei ist

$$G_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \omega} \left( \cos \frac{\omega}{2} + \sin \frac{\omega}{2} \right) \quad G_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \omega} \left( \cos \frac{\omega}{2} - \sin \frac{\omega}{2} \right)$$



$$F_1 = \int_0^{\omega/2} (\cos t + \sin t) \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}} \quad F_2 = \int_0^{\omega/2} (\cos t - \sin t) \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}}$$

Tabelle 2

Näherungsformeln zu den Ausdrücken der Tabelle 1 für kleine Werte der reduzierten Frequenz  $\omega$

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} k_{a\gamma r} &= -4\sqrt{\omega} + 2\omega\sqrt{\omega} & \sqrt{\pi} k_{a\gamma i} &= -4\sqrt{\omega} - 2\omega\sqrt{\omega} \\ \sqrt{\pi} k_{a\alpha r} &= \frac{4}{\sqrt{\omega}} + \frac{8}{3}\sqrt{\omega} & \sqrt{\pi} k_{a\alpha i} &= -\frac{4}{\sqrt{\omega}} + \frac{8}{3}\sqrt{\omega} \\ \sqrt{\pi} k_{m\gamma r} &= -\frac{2}{3}\sqrt{\omega} - \frac{1}{5}\omega\sqrt{\omega} & \sqrt{\pi} k_{m\gamma i} &= -\frac{2}{3}\sqrt{\omega} + \frac{1}{5}\omega\sqrt{\omega} \\ \sqrt{\pi} k_{m\alpha r} &= \frac{2}{3\sqrt{\omega}} - \frac{4}{5}\sqrt{\omega} & \sqrt{\pi} k_{m\alpha i} &= -\frac{2}{3\sqrt{\omega}} - \frac{4}{5}\sqrt{\omega} \end{aligned}$$

Tabelle 3

Die numerischen Werte der Luftkraftkoeffizienten für  $M = 1$ ;  
Bezugspunkt: Profilmitt

$\omega$	$-k_{a\gamma r}$	$-k_{a\gamma i}$	$k_{a\alpha r}$	$-k_{a\alpha i}$	$-k_{m\gamma r}$	$-k_{m\gamma i}$	$k_{m\alpha r}$	$-k_{m\alpha i}$
0,04	0,4424	0,4604	11,5863	10,9846	0,0761	0,0743	1,7905	1,9710
0,08	0,6129	0,6640	8,4090	7,5580	0,1089	0,1038	1,2026	1,4579
0,12	0,7353	0,8291	7,0443	6,0023	0,1349	0,1255	0,9303	1,2429
0,16	0,8315	0,9759	6,2566	5,0536	0,1575	0,1430	0,7611	1,1221
0,2	0,9100	1,1118	5,7371	4,3924	0,1779	0,1578	0,6411	1,0446
0,4	1,1517	1,7219	4,5690	2,6719	0,2643	0,2074	0,3149	0,8848
0,6	1,2514	2,2971	4,1662	1,8519	0,3378	0,2337	0,1469	0,8433
0,8	1,2689	2,8751	3,9985	1,3407	0,4045	0,2454	0,0346	0,8361
1	1,2309	3,4690	3,9355	0,9849	0,4665	0,2460	-0,0491	0,8434
1,2	1,1529	4,0843	3,9278	0,7234	0,5243	0,2374	-0,1149	0,8580
1,4	1,0455	4,7236	3,9521	0,5258	0,5781	0,2209	-0,1682	0,8765
1,6	0,9164	5,3880	3,9954	0,3752	0,6278	0,1976	-0,2121	0,8976
1,8	0,7718	6,0779	4,0500	0,2607	0,6734	0,1681	-0,2484	0,9202
2	0,6168	6,7929	4,1109	0,1752	0,7144	0,1332	-0,2782	0,9439

Tabelle 4

A. Zusammenhang mit der Bezeichnungsweise von TEMPLE und JAHN [9].  
Bezugspunkt: Profilmitt.

$$\begin{aligned} k_{a\gamma r} &= -2 l_z & k_{a\alpha r} &= 2 l_\alpha & k_{m\gamma r} &= -2 m_z & k_{m\alpha r} &= 2 m_\alpha \\ k_{a\gamma i} &= -2 \omega l_z & k_{a\alpha i} &= 2 \omega l_\alpha & k_{m\gamma i} &= -2 \omega m_z & k_{m\alpha i} &= 2 \omega m_\alpha \end{aligned}$$

## B. Zusammenhang mit der Bezeichnungweise von BARTON [3].

Bezugspunkt: Profilvorderkante.

$$\begin{aligned}
 k'_{ayr} &= 2 \omega^2 P_2 & k'_{aar} &= 2 \omega^2 P_4 & k'_{myr} &= 2 \omega^2 M_6 & k'_{mar} &= 2 \omega^2 M_3 \\
 k'_{ayi} &= 2 \omega^2 P_1 & k'_{aai} &= 2 \omega^2 P_3 & k'_{myi} &= 2 \omega^2 M_5 & k'_{mai} &= 2 \omega^2 M_1
 \end{aligned}$$

## C. Zusammenhang mit der Bezeichnungweise von GARRICK und RUBINOW [10].

Bezugspunkt: Profilvorderkante.

$$\begin{aligned}
 k'_{ayr} &= -2 \omega^2 L_1 & k'_{aar} &= \omega^2 L'_3 & k'_{myr} &= \omega^2 M'_1 & k'_{mar} &= -\frac{\omega^2}{2} M'_3 \\
 k'_{ayi} &= -2 \omega^2 L_2 & k'_{aai} &= \omega^2 L'_4 & k'_{myi} &= \omega^2 M'_2 & k'_{mai} &= -\frac{\omega^2}{2} M'_4
 \end{aligned}$$

Bemerkung:  $\omega$  ist die mit der vollen Profiltiefe errechnete reduzierte Frequenz.

## 5. Resultate

Mit Hilfe des genannten Quellenmaterials wurden die Mittelpunktskoordinaten  $\xi_m, \eta_m$  und der Radius  $r$  des Grenzkreises nach den Formeln (23) bis (25)

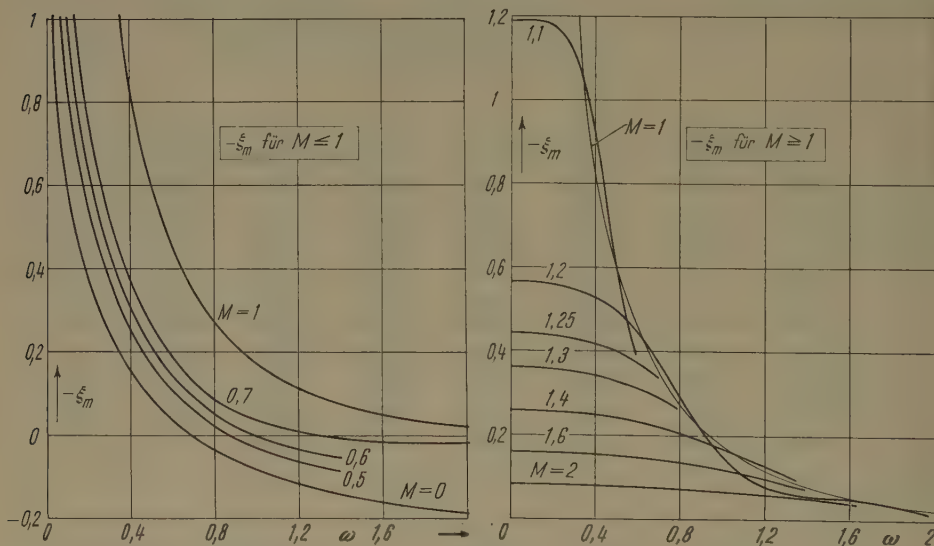


Fig. 4

Mittelpunktskoordinate  $\xi_m$  des Grenzkreises über der reduzierten Frequenz  $\omega$  für verschiedene Mach-Zahlen  $M$ .

ausgerechnet. Die Ergebnisse sind in den Fig. 4 bis 6 zusammengestellt. Aufgetragen wurden  $\xi_m$  und die (mit  $\omega$  multiplizierten) Werte  $\omega \eta_m$  und  $\omega r$  über

$\omega$  für verschiedene Mach-Zahlen. Berechnet und in Fig. 7 dargestellt ist weiterhin die Größe  $\lambda_m$  nach (26), welche ein Maß für die größtmögliche Anfachung gibt.

Zunächst sei das auffallende Resultat hervorgehoben, daß (mit Ausnahme des inkompressiblen Falles  $M = 0$ ) der Radius  $r$  und damit auch  $\lambda_m$  bei einem

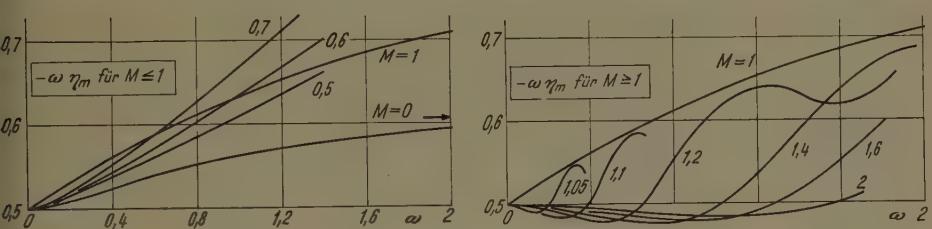


Fig. 5  
Mittelpunktskoordinate  $\eta_m$  des Grenzkreises über  $\omega$  für verschiedene  $M$ .

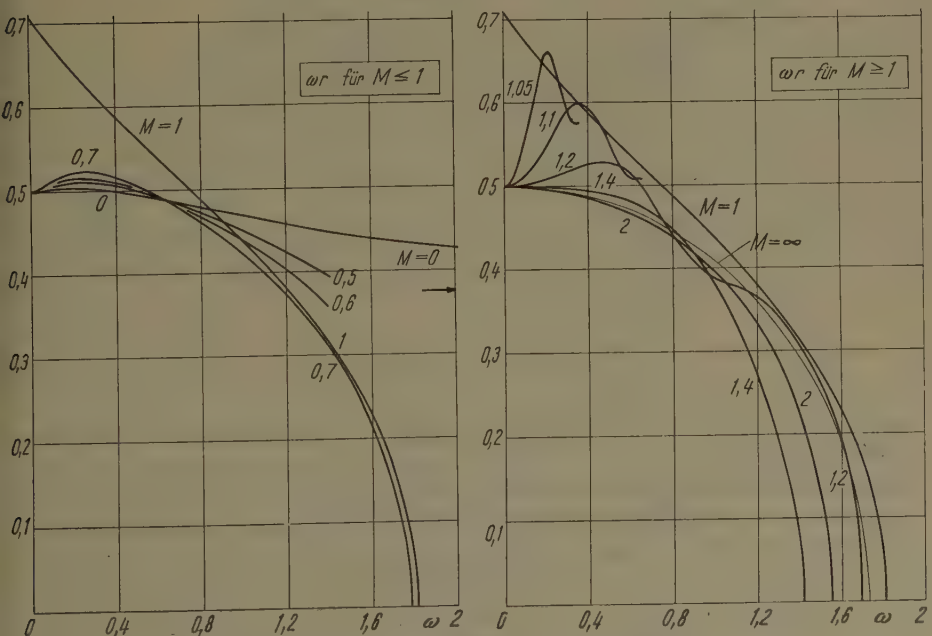


Fig. 6  
Radius  $r$  des Grenzkreises über  $\omega$  für verschiedene  $M$ .

endlichen, von der Mach-Zahl abhängenden Wert  $\omega = \omega^*$  zu Null wird; für größere Werte von  $\omega$  wird  $r$  imaginär,  $\lambda_m$  negativ. Es tritt also für  $\omega > \omega^*$  der vorhin besprochene Fall ein, daß das hinreichende Kriterium (28) zur Flutter-

freiheit erfüllt ist. Den Verlauf von  $\omega^*$  über  $M$  zeigt Fig. 8. Für die Flutterrechnung ergibt sich die wichtige praktische Konsequenz, daß die kritischen Größen nur unterhalb der Grenze  $\omega^*$  gesucht werden müssen. Auch bei der Aufstellung von Tabellen der Luftkraftkoeffizienten kann man sich vom Standpunkt des Flutterproblems aus mit zwei Freiheitsgraden auf das Gebiet  $\omega < \omega^*$

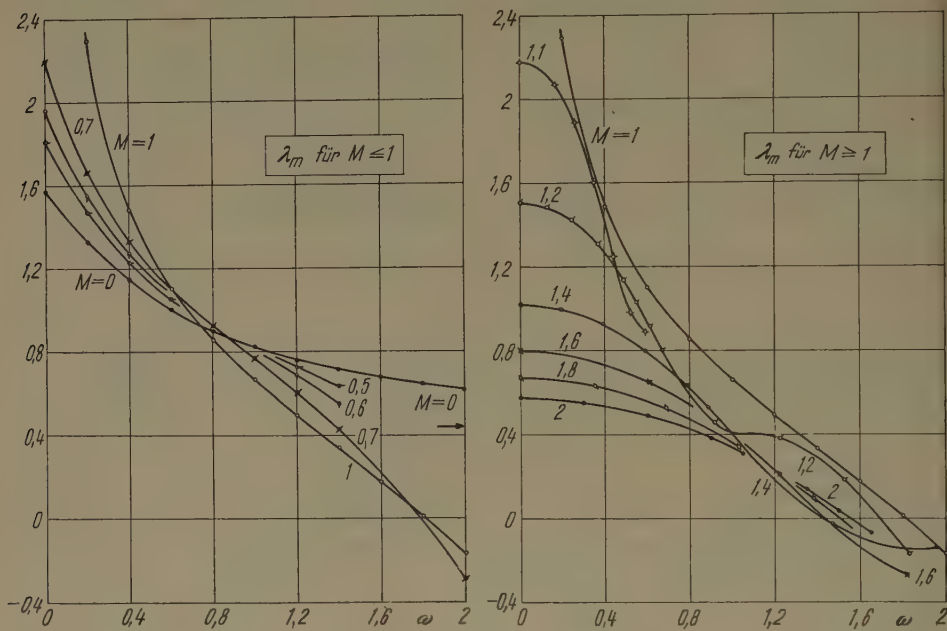


Fig. 7

Maximaler Leistungsbeiwert  $\lambda_m$ .

beschränken. Für  $M = 1$  wurde zum Beispiel  $\omega^* = 1,809$  gefunden. — Wird die Zahl der Freiheitsgrade durch Einbeziehung der Ruderschwingungen erhöht, so verschiebt sich allerdings die Grenze weiter nach oben.

Allein im Sonderfall  $M = 0$  findet man  $\omega^* = \infty$ ; Flattern ist also prinzipiell bis zu beliebig hohen reduzierten Frequenzen möglich. Die für  $M = 0$  berechneten Luftkraftkoeffizienten fallen aber gewissermaßen aus der Reihe, da bei ihrer Berechnung nicht nur die Geschwindigkeit  $U$  klein gegen die Schallgeschwindigkeit vorausgesetzt war, sondern auch die Schallgeschwindigkeit  $= \infty$  gesetzt wurde. Dies kann bei hohen Frequenzen (das heißt großen  $\omega$ -Werten) selbst bei kleinem  $U$  zu unrichtigen Ergebnissen führen. Es ist wahrscheinlich, daß bei Berücksichtigung der endlichen Schallgeschwindigkeit auch im Grenzfall  $U \rightarrow 0$  ein endliches  $\omega^*$  gefunden wird. Für  $M = 0,5$  und  $M = 0,6$  gestatten es die vorhandenen Werte von DIETZE nicht, auf  $\omega^*$  zu extrapolieren. Für



$M = 0,7$  findet man  $\omega^* = 1,78$ ; der Wert wurde als Nullstelle von  $\lambda_m$  interpoliert zwischen  $\omega = 1,4$  und  $\omega = 2$  (Fig. 7), so daß die letzte Stelle unsicher ist. Es sei auch daran erinnert, daß die Rechnung nach DIETZE bei hohen  $M$ - und  $\omega$ -Werten schlecht konvergiert.

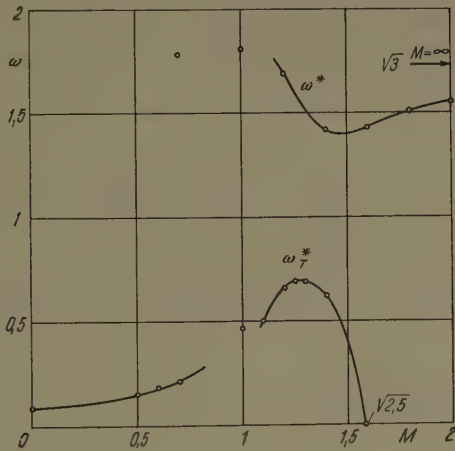


Fig. 8

Verlauf der Grenze  $\omega^*$  für Flattern mit zwei Freiheitsgraden über der Mach-Zahl.  $\omega_T^*$  = Grenze für Flattern mit einem Freiheitsgrad (Torsion).

Im Überschallgebiet wurden mit den Tabellen von TEMPLE und JAHN die folgenden Werte gefunden:

$M$	$\omega^*$	Interpoliert zwischen	
		$\omega < \omega^*$	$\omega > \omega^*$
1,2	1,69	(1,53 und 1,83)	
1,4	1,42	(0,98 und 1,47)	
1,6	1,43	(1,22 und 1,82)	
1,8	1,51	(1,38 und 2,07)	
2	1,55	(1,5 und 1,65)	

Im Grenzfall  $M \rightarrow \infty$  lassen sich durch Einsetzen der Werte (32) in die Formeln (23) bis (26) leicht die folgenden analytischen Ausdrücke finden:

$$\left. \begin{aligned} \xi_m &= 0 \text{ (Profilmitte) ,} \\ \eta_m &= -\frac{1}{2\omega}, \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{3}}, \quad \lambda_m = \frac{1}{M} \left( 1 - \frac{\omega^2}{3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Aus den Formeln (37) folgt  $\omega^* = \sqrt{3} = 1,732$  für  $M \rightarrow \infty$ .  
Geometrisch besagt unser Ergebnis, daß Flattern nur eintreten kann, wenn nach der Beziehung (4a)

$$L > \frac{2 \pi}{\omega^*} l$$

ist; zum Beispiel für  $\omega^* = \sqrt{3}$  muß die Wellenlänge  $L$  größer als 3,62 Flügeltiefen  $l$  sein. Dies ist in gewissem Maße auch anschaulich zu verstehen: für Wellenlängen, die zu klein sind verglichen mit der Flügeltiefe, kann sich das Profil nicht mehr so «durchschlängeln», daß die Schwingung ungedämpft oder gar angefacht wird (vergleiche Fig. 2).

Als nächstes seien die quasistationären Grenzwerte für kleine  $\omega$  diskutiert. In stationärer Strömung  $\omega = 0$  ist für  $M < 1$

$$\left. \begin{aligned} c_{a_0} &= \frac{2\pi}{\sqrt{1-M^2}} \alpha_0 \\ c_{a_0} &= \frac{4}{\sqrt{M^2-1}} \alpha_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{und für } M > 1 \quad (38)$$

Mit den entsprechenden Kraftangriffspunkten als Bezugspunkt ( $M < 1$ : 1/4-Punkt,  $M > 1$ : Profilmitte) findet man durch Vergleich mit (3) für  $\omega = 0$ :

$$M < 1: k_{a\alpha r} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-M^2}}, \quad M > 1: k_{a\alpha r} = \frac{4}{\sqrt{M^2-1}}, \quad (39)$$

alle anderen Luftkraftkoeffizienten = 0.

Nun denken wir uns  $\alpha = \text{const} = \alpha_0$ , daneben soll aber das Profil eine «langsame» Schlagschwingung ausführen:  $y = y_0 e^{i\nu t}$ . Quasistationär können dann die Luftkräfte bekanntlich durch Berücksichtigung eines scheinbaren Anstellwinkels  $\alpha_S = -\dot{y}/U$  in den stationären Formeln (38) erfaßt werden:  $\alpha$  ist mit  $\alpha + \alpha_S$  zu ersetzen. Es ist

$$\alpha_S = -\frac{\dot{y}}{U} = -\frac{i\nu}{U} y_0 e^{i\nu t},$$

also die entsprechende Amplitude

$$\alpha_{S_0} = -\frac{i\nu}{U} y_0 \quad (40)$$

und nach (38), (39) und (40)

$$c_{a_0} = k_{a\alpha r} \left( \alpha_0 - i\omega \frac{y_0}{l} \right), \quad (41)$$

nach Vergleich mit (3) folgt

$$k_{a y i} = -\omega k_{a\alpha r} \quad (42)$$

als quasistationär allgemein gültige Grenzbeziehung. Zunächst sieht man, daß  $k_{a y i}$  nach (42) negativ ist. Es ist anschaulich leicht einzusehen, daß quasistationär die reine Schlagschwingung immer gedämpft wird, was gleichbedeutend

ist mit negativem  $k_{a\gamma i}$ . Das große Zahlenmaterial mit exakten Werten für  $k_{a\gamma i}$  zeigt für alle  $\omega$  und  $M$ , daß  $k_{a\gamma i} < 0$ , auch genau gerechnet, immer zutrifft.

Die Beziehung (42) gestattet schon, den für alle Mach-Zahlen gültigen und für die Schwingungsform entscheidenden Grenzwert von  $\eta_m$  für  $\omega \rightarrow 0$  nach (24) anzugeben. Der Grenzwert von  $k_{m\gamma r}$  wird mit dem stationären Kraftangriffspunkt als Bezugspunkt gleich Null, und man erhält nach (24) und (42):

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \eta_m = -\frac{1}{2\omega}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} (\omega \eta_m) = -\frac{1}{2}. \quad (43)$$

Für den Grenzwert von  $\xi_m$  braucht man nach (23) noch die quasistationären Werte von  $k_{m\gamma i}$  und  $k_{a\alpha i}$ . Aus (41) folgt  $k_{a\alpha i} = k_{m\gamma i} = 0$  für  $\omega \rightarrow 0$ ; da aber auch  $k_{a\gamma i}$  gegen Null strebt für  $\omega \rightarrow 0$ , ist  $\xi_m$  mit den bisherigen Ergebnissen noch unbestimmt. Für  $M < 1$  seien nur die Ergebnisse einer weitergehenden Untersuchung angeführt: es wird

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \xi_m = -\infty,$$

und zwar logarithmisch unendlich mit  $\omega$ . Für  $M = 1$  folgt aus den Werten der Tabelle 2

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \xi_m = -\frac{1}{2\omega},$$

während sich für  $M > 1$  aus den Formeln (31) ergibt:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \xi_m = -\frac{1}{4(M^2 - 1)}$$

mit der Profilmitte als Bezugspunkt.

Für  $r$  findet man (mit der bemerkenswerten Ausnahme  $M = 1$ ), daß für  $\omega \rightarrow 0$  im Ausdruck (25) die unendlich werdende Größe  $\eta_m$  gegen alle anderen überwiegt, so daß der Grenzwert gilt ( $M \neq 1$ ):

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} r = \lim_{\omega \rightarrow 0} |\eta_m| = \frac{1}{2\omega}. \quad (44)$$

Im Sonderfall  $M = 1$  ergibt sich quasistationär für  $r$  eine Diskontinuität: nach den Werten der Tabelle 2 wird

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} r = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} = \sqrt{2} \lim_{\omega \rightarrow 0} |\eta_m|. \quad (45)$$

Man sieht, daß  $\eta_m$  und  $r$  für alle Mach-Zahlen, aber auch  $\xi_m$  für  $M \leq 1$  gegen Unendlich streben mit  $\omega \rightarrow 0$ . Aus diesem Grunde sind in den Fig. 5 und 6 die endlich bleibenden Werte  $\omega \eta_m$  und  $\omega r$  aufgetragen. Es ist auch für sehr

kleine  $\omega$ -Werte günstiger, den Grenzkreis in einer  $(\omega \xi, \omega \eta)$ -Ebene zu untersuchen. Geometrisch bedeutet die Multiplikation mit  $\omega$  die Einführung der Wellenlänge  $L$  statt  $l$  als Bezugsgröße: nach (4a) und (8) ist

$$\omega \xi = 2\pi \frac{l}{L} \cdot \frac{y_0}{\alpha_0 l} = 2\pi \frac{y_0}{\alpha_0 L}.$$

Auch die Betrachtung einer «Grenzellipse» in einer  $(\xi, \omega \eta)$ -Ebene kann praktisch vorteilhaft sein; für die Schwingungsform ist nach (16) direkt die Größe  $\omega \eta$  maßgebend.

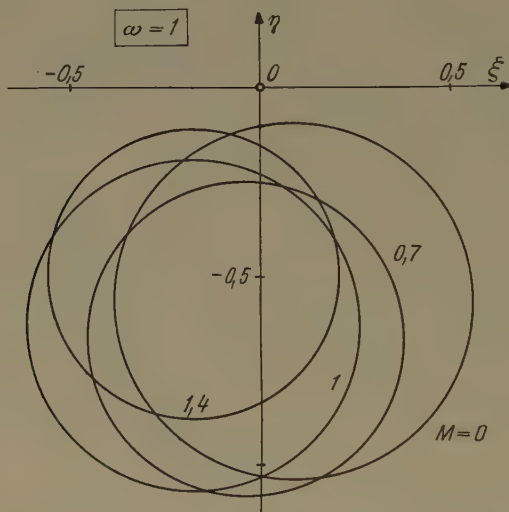


Fig. 9

Grenzkreise für  $\omega = 1$  und verschiedene Mach-Zahlen.

Bei der weiteren Verfolgung der Verläufe von  $\xi_m$ ,  $\eta_m$  und  $r$  über  $\omega$  zeigt sich, daß besonders die Werte von  $\omega \eta_m$  und  $\omega r$  für verschiedene Mach-Zahlen nirgends um größere Beträge voneinander abweichen (Fig. 5 und 6). Die Verläufe für Überschall-Mach-Zahlen nahe an 1 zeigen rasche Schwankungen, wie es nach dem entsprechenden Verhalten der Luftkraftkoeffizienten zu erwarten war; die Abweichungen von den Werten für  $M = 1$  erreichen aber nur relativ kleinere Beträge. Man darf also schließen, daß im allgemeinen die kritischen Schwingungsformen nur wenig von der Mach-Zahl abhängen. Als Beispiel sind in Fig. 9 die Grenzkreise für  $\omega = 1$  und für die Mach-Zahlen  $M = 0; 0,7; 1; 1,4$  eingezeichnet. Lage und Größe der Kreise sind nicht stark verschieden. Es ist von besonderer Bedeutung, daß alle diese Kreise ganz in der Halbebene  $\eta < 0$  liegen. Unter dieser Bedingung haben nämlich die gleichen konstruktiven Richt-



linien zur Verhütung des Flatterns ihre Gültigkeit, die schon bei der Diskussion des inkompressiblen Falles aufgestellt wurden. Die Maßnahmen lauten:

1. Biege- und Torsionsfrequenz der Standschwingung sollen möglichst verschieden sein. Da bei den gefährlichen Flutterformen beide Freiheitsgrade mitspielen, ist es vorteilhaft, wenn die beiden Frequenzen höchstens durch große Luftkräfte zueinander gestimmt werden können.
2. Der Schwerpunkt soll möglichst vorne liegen. Die Schwingungen mit  $\eta < 0$  sind nämlich dadurch gekennzeichnet, daß zum Beispiel beim Herunterschwingen die Profilhinterkante gegenüber der Vorderkante zurückbleibt, wie aus Fig. 2a ersichtlich ist (im Gegensatz zu Fig. 2c). Eine derartige gefährliche Schwingungsform wird durch einen hinten liegenden Schwerpunkt begünstigt, so daß umgekehrt die Schwerpunktsvorlagerung die Flattergefahr vermindern wird.
3. Die beste Lage der elastischen Achse wird bekanntlich durch die statische Bedingung des Auskippens bestimmt und ist möglichst vorne am günstigsten. Vom Flatterstandpunkt aus wird allerdings die gefährliche Form (Fig. 2a) durch vorne liegende elastische Achse begünstigt; weit hinten liegende elastische Achse bedeutet hingegen Schwächung der Torsionsfeder, so daß man hier auf diesem qualitativen Wege zu keiner weiteren Empfehlung gelangen kann.

Es ist auch anschaulich einzusehen, daß die in Fig. 2a dargestellte Schwingungsform gefährlich ist. Die Luftkraft wird nämlich näherungsweise (quasistationär) bestimmt durch den Anstellwinkel relativ zur absoluten Bahn des Profils. Bei der Form nach Fig. 2a ergibt sich dadurch eine Kraft nach unten beim Herunterschwingen und nach oben beim Heraufschwingen, also Anfachung.

Die größtmögliche Anfachung ergibt sich für die Schwingungsform, die dem Mittelpunkt des Grenzkreises entspricht. Man versteht, daß die Mittelpunkte für alle  $M$  und  $\omega$  in der negativen Halbebene  $\eta < 0$  liegen. Nach Fig. 5 wird sogar die Abweichung vom quasistationären Grenzwert (43):  $\omega \eta_m = -0,5$  nicht sehr groß für alle  $M$  und  $\omega$ .

Die Ergebnisse der Flatterrechnung von GARRICK und RUBINOW [10] für das Überschallgebiet bestätigen die bisherigen qualitativen Folgerungen. Betreffend der Schwerpunktlage finden GARRICK und RUBINOW, daß es eine Grenzlage gibt, bei der durch weiteres Vorrücken des Schwerpunktes das Flattern überhaupt unmöglich wird. Die Grenze liegt etwa bei der Profilmittle für solche Torsionsfrequenzen, die viel höher sind als die Biegefrequenz; bei Annäherung der beiden ist die Grenze eher durch die elastische Achse gegeben. Wenn der Schwerpunkt hinter diese Grenze gelangt, wird aber die Flattergefahr meist sehr plötzlich erhöht.

In einem Falle gelangen jedoch GARRICK und RUBINOW zu keiner eindeutigen Flattergrenze durch Schwerpunktsvorlagerung, nämlich bei der kleinsten

untersuchten Mach-Zahl ( $M = 10/9$ ), die  $M = 1$  am nächsten liegt. Der Mach-Bereich nahe an  $M = 1$  ist noch durch eine andere Erscheinung gekennzeichnet, die von verschiedenen Autoren schon hervorgehoben wurde: es besteht die Möglichkeit von Flattern mit nur einem Freiheitsgrad, das heißt in der Form reiner Torsionsschwingung. Nach unserer Betrachtungsweise hängen diese beiden Erscheinungen zusammen. Wie schon früher gesagt wurde, können reine Torsionsschwingungen angefacht werden, wenn die  $\xi$ -Achse vom Grenzkreis geschnitten wird. Ein Teil des Grenzkreises wird dann in die positive Halbebene  $\eta > 0$  hereinragen; die gefährlichen Schwingungsformen, welche diesen Punkten entsprechen, werden durch die Maßnahme der Schwerpunktsvorlage- rung nicht verhindert, ja sogar begünstigt. Die Frage des Flatterns mit nur einem Freiheitsgrad erfordert also besondere Beachtung.

Es zeigt sich, daß die zum Schnitt mit der  $\xi$ -Achse notwendige Bedingung (29)  $r > |\eta_m|$  nur in einem beschränkten Bereich von  $\omega$  und  $M$  erfüllt ist. Im quasistationären Grenzfall sind mit Ausnahme von  $M = 1$  die Grenzwerte  $r$  und  $|\eta_m|$  nach (44) einander gleich, das heißt, die  $\xi$ -Achse wird gerade berührt. Bei  $M = 1$  gibt es eine Diskontinuität: nach (45) ist für  $\omega \rightarrow 0$ :  $r > |\eta_m|$ , die  $\xi$ -Achse wird geschnitten. Mit wachsendem  $\omega$  wird aber der Überschuß von  $r$  gegen  $|\eta_m|$  geringer, und bald wird eine Grenze erreicht — sie soll  $\omega_T^*$  genannt werden —, wo der Grenzkreis die  $\xi$ -Achse nur noch berührt. Für  $M = 1$  wird  $r = |\eta_m|$  für  $\omega_T^* = 0,465$ . Bei größeren reduzierten Frequenzen ist reine Torsionsschwingung nicht mehr möglich.

Im Gebiet  $M < 1$  wächst von  $\omega = 0$  aus gehend  $r$  zunächst etwas stärker als  $|\eta_m|$ , doch bleibt der Überschuß sehr gering und hört bei einer niederen Grenze  $\omega_T^*$  auf. Es ergeben sich für  $\omega_T^*$  die Werte:

$M$	$\omega_T^*$
0	0,088
0,5	0,15
0,6	0,18
0,7	0,21

Bei Annäherung an  $M = 1$  wird also  $\omega_T^*$  größer; auch von der Überschall- seite her zeigt es sich, daß reine Torsion und Formen mit  $\eta > 0$  besonders in der Umgebung von  $M = 1$  auftreten können. Die Werte von  $\omega_T^*$  sind für  $M > 1$ :

$M$	$\omega_T^*$
1,1	0,50
1,2	0,66
1,25	0,69
1,3	0,68
1,4	0,62

Der Verlauf von  $\omega_T^*$  über  $M$  ist in Fig. 8 eingetragen. Über den Durchgang dieser Kurve bei  $M = 1$  wissen wir, daß er mindestens von der Überschallseite her durch immer raschere und kleinere Schwankungen erfolgt. — Um auch ein

Bild zu erhalten von der Größe des Grenzkreisgebietes, der in die positive Halbebene  $\eta > 0$  zu liegen kommt, ist in Fig. 10 der Verlauf von  $\omega(r - |\eta_m|)$  über  $\omega$  für verschiedene Mach-Zahlen aufgetragen. Mit Ausnahme der näheren Umgebung von  $M = 1$  (besonders überschallseitig) sind die Schnitte sehr schiefend.

In Fig. 8 fällt die  $\omega_T^*$ -Kurve von etwa  $M = 1,4$  an steil herunter und erreicht den Wert 0 bei der Mach-Zahl  $M = \sqrt{5/2} = 1,581$ . Dieser bemerkenswerte Grenzwert läßt sich leicht herleiten, wenn man die Grenze für reine Torsionsschwingung nach der Bedingung (30) mit den quasistationären Luftkraftkoeffizienten (31) sucht. Er ist auch in den Arbeiten von GARRICK und RUBINOW [10] und von BARTON [3] enthalten. Für größere Mach-Zahlen können überhaupt keine reinen Torsionsschwingungen auftreten.

Die relativ niedrige Grenze der reduzierten Frequenz für reine Torsion läßt schließen, daß man dieser Art der Flattergefahr durch genügend hohe Torsionssteifigkeit begegnen kann. Betrachten wir zum Beispiel eine Anström-Mach-Zahl  $M = 1,25$  (also etwa  $U = 375$  m/s), für den sich der höchste Wert  $\omega_T^* = 0,69$  ergeben hat. Nach (4) ist  $\nu = \omega U/l$ , bei einer Profiltiefe  $l = 2$  m entspricht somit dem Wert von  $\omega_T^*$  eine Kreisfrequenz  $\nu_T^* = 130$  rad/s oder die Frequenz  $f_T^* = 20,6$  Hz. Wenn bei genügender Torsionssteifigkeit diese Frequenz (auch unter Einwirkung der Luftkräfte) nicht unterschritten werden kann, ist das ganze Gebiet  $\eta > 0$  aus dem Gefahrenbereich ausgeschlossen. Die vollständige Diskussion dieses Problems wird erschwert durch den Umstand, daß für  $M$  nahe an 1 und kleine  $\omega$ -Werte die früher erwähnten physikalischen Einschränkungen gelten.

Im Rahmen dieser Theorie, welche ebene Strömung und Zulässigkeit der Linearisierung voraussetzt, kann man jedoch mit Unterstützung der quantitativen Ergebnisse von GARRICK und RUBINOW zu einer einfachen Empfehlung gelangen, wie ein Flügel am besten für alle Mach-Zahlen flattersicher gebaut werden soll: durch passende Vorlagerung des Schwerpunktes wird die Flattergefahr auf die Umgebung von  $M = 1$  beschränkt; diese Gefahr ist für die nötige Torsionssteifigkeit maßgebend.

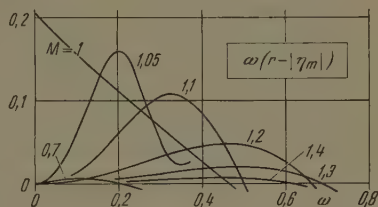


Fig. 10  
Verlauf von  $\omega(r - |\eta_m|)$  über  $\omega$  für verschiedene  $M$ .

## Anhang: Beziehungen zur vollständigen Lösung des Flatterproblems

Im folgenden sei noch untersucht, was die bisherigen Überlegungen vom algebraischen Standpunkt für die eingangs beschriebene vollständige Aufgabe der Frequenzbestimmung bedeuten; von den Einzelheiten des mechanischen

Problems wird abgesehen. Die Aufgabe lautet bei  $n$  Freiheitsgraden: es sind die Eigenwerte  $\Lambda$  ( $= 1/\nu^2$ ) des Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^n c_{jk} z_k = \Lambda g_j z_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (46)$$

bei komplexem  $c_{jk}$  anzugeben, und es sind Bedingungen für die  $c_{jk}$  zu finden, unter denen  $\Lambda$  rein reell wird. Die Gleichungen (46) sind etwas verallgemeinert gegenüber dem üblicherweise betrachteten Fall durch Berücksichtigung der Koeffizienten  $g_j$ , die in unserem Problem wesentlich reell und positiv sein müssen.

Wir beschränken uns im weiteren wieder auf  $n = 2$ ; die Verallgemeinerungsmöglichkeit wird leicht ersichtlich sein. Alle Größen seien in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$c_{jk} = a_{jk} + i b_{jk}, \quad z_j = x_j + i y_j, \quad \Lambda = \varrho + i \sigma. \quad (47)$$

(47) in (46) eingesetzt, gibt für  $n = 2$  vier reelle Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 - b_{11} y_1 - b_{12} y_2 &= \varrho g_1 x_1 - \sigma g_1 y_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 - b_{21} y_1 - b_{22} y_2 &= \varrho g_2 x_2 - \sigma g_2 y_2, \\ b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 &= \varrho g_1 y_1 + \sigma g_1 x_1, \\ b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 &= \varrho g_2 y_2 + \sigma g_2 x_2. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Gesucht sind die Bedingungen für die  $a_{jk}$  und  $b_{jk}$ , unter denen  $\Lambda$  rein reell, das heißt  $\sigma = 0$  sein kann. Um darüber zu entscheiden, multiplizieren wir nach klassischem Vorbild die Gleichungen (48) der Reihe nach mit  $-y_1$ ,  $-y_2$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  und addieren sie. Man kann sich davon überzeugen, daß diese formale Operation der Berechnung der Arbeit entspricht. Es wird so  $\varrho$  eliminiert, und man findet nach leichter Umformung:

$$\left. \begin{aligned} b_{11} (x_1^2 + y_1^2) + (b_{12} + b_{21}) (x_1 x_2 + y_1 y_2) + b_{22} (x_2^2 + y_2^2) \\ + (a_{12} - a_{21}) (x_1 y_2 - x_2 y_1) &= \sigma (g_1 x_1^2 + g_1 y_1^2 + g_2 x_2^2 + g_2 y_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Wenn nun die  $g_j$  positiv sind, so kann der quadratische Ausdruck auf der rechten Seite von (49) außer dem trivialen Fall  $x_j = y_j = 0$  nicht verschwinden und ist immer positiv. Das Vorzeichen von  $\sigma$  wird durch die linke Seite von (49) bestimmt. Ist nun

$$a_{12} = a_{21}, \quad b_{12} = -b_{21}, \quad b_{11} = b_{22} = 0,$$

allgemeiner:

$$a_{jk} = a_{kj}, \quad b_{jk} = -b_{kj}, \quad (50)$$

so verschwindet die linke Seite identisch, und es wird immer  $\sigma = 0$ . Bei Erfüllung der Bedingung (50) ist  $c_{jk}$  eine sogenannte Hermitesche Form, für



welche wir den klassischen Beweis wiederholt haben, daß die Eigenwerte  $\lambda$  immer reell sind.

Ist nun die Form  $c_{jk}$  nicht hermitesch — und dies ist beim Flutterproblem der Fall —, so muß die auf der linken Seite von (49) stehende quadratische Form indefinit sein, das heißt, für gewisse Werte von  $x_j$  und  $y_j$  (auch außer  $x_j = y_j = 0$ ) verschwinden können, damit  $\sigma = 0$  sein kann. Die Koeffizienten dieses quadratischen Ausdruckes enthalten nur

$$a_{jk} - a_{kj} \quad \text{und} \quad b_{jk} + b_{kj}$$

(somit auch die  $b_{jj}$ ).

Beim mechanischen Problem ohne Luftkräfte und ohne Dämpfung ist die Form  $c_{jk}$  sogar reell symmetrisch, das heißt  $a_{jk} = a_{kj}$  und  $b_{jk} = 0$ . Es ist verständlich, daß dann beim Flutterproblem die linke Seite von (49) nur die Luftkraftkoeffizienten enthalten wird. Die  $a_{jj}$  treten in (49) überhaupt nicht auf; dem entspricht die Tatsache, daß in der früheren Gleichung (21)  $k_{ayr}$  und  $k_{m\alpha r}$  nicht vorkommt.

Für  $n = 2$  wird die Diskussion der Gleichung (49) sehr einfach. Wegen der Homogenität des Problems darf es nicht auf die Werte von  $z_1$  und  $z_2$  selbst ankommen, sondern nur auf deren Verhältnis  $\zeta$ :

$$\zeta = \frac{z_1}{z_2} = \xi + i\eta$$

oder anders ausgedrückt: mit der Normierung  $z_2 = 1$ , das heißt

$$x_2 = 1, \quad y_2 = 0 \tag{51a}$$

wird  $z_1 = \zeta$ , das heißt

$$x_1 = \xi, \quad y_1 = \eta. \tag{51b}$$

Mit (51a) und (51b) wird die Gleichung (49):

$$b_{11}(\xi^2 + \eta^2) + (b_{12} + b_{21})\xi - (a_{12} - a_{21})\eta + b_{22} = \sigma(g_1\xi^2 + g_1\eta^2 + g_2). \tag{52}$$

$\sigma = 0$  ist in der  $(\xi, \eta)$ -Ebene die Gleichung eines Kreises; ist dieser imaginär, so kann  $\sigma$  nicht verschwinden. Bei reellem Kreis kann  $\sigma = 0$  sein, doch ist die Realität des Kreises  $\sigma = 0$  nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung dafür, daß der Eigenwert  $\lambda$  von (46) reell ist.

## LITERATURVERZEICHNIS

1. R. KASSNER und H. FINGADO, *Das ebene Problem der Flügelschwingung*, Luftfahrtforschung 13, 374–387 (1936).
2. J. H. GREIDANUS, *De arbeid, die de luchtcrachten per tijdseenheid op een trillende vleugel verrichten*, Rap. V. 1237, Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam 1940. — Vgl. auch vom gleichen Autor: *Low-Speed Flutter*, J. aeron. Sci. 16, 127 (1949).



3. M. V. BARTON, *Stability of an Oscillating Airfoil in Supersonic Airflow*, J. aeron. Sci. 15, 371–376 (1948).
4. F. DIETZE, *Die Luftkräfte des harmonisch schwingenden Flügels im kompressiblen Medium bei Unterschallgeschwindigkeit*, Dtsch. Luftfahrtforsch. Zentr. wiss. Ber.-Wes. Forsch.-Ber. 1733 (1943).
5. C. POSSIO, *L'azione aerodinamica sul profilo oscillante alle velocità ultrasonore*, Acta Pontif. Acad. Sci. 1, 93–106 (1937).
6. S. v. BORBÉLY, *Über die Luftkräfte, die auf einen harmonisch schwingenden zweidimensionalen Flügel bei Überschallgeschwindigkeit wirken*, Z. angew. Math. Mech. 22, 190–205 (1942).
7. L. SCHWARZ, *Ebene instationäre Theorie der Tragfläche bei Überschallgeschwindigkeit*, Jb. dtsh. Luftfahrtforsch. I A 010, S. 1–8 (1943).
8. H. HÖNL, *Zweidimensionale Tragflächentheorie im Überschall*, Dtsch. Luftfahrtforsch. Zentr. wiss. Ber.-Wes. Forsch.-Ber. 1903 (1944).
9. G. TEMPLE und H. A. JAHN, *Flutter at Supersonic Speeds: Derivative Coefficients for a Thin Aerofoil at Zero Incidence*, R. & M. Nr. 2140 (1945).
10. I. E. GARRICK und S. I. RUBINOW, *Flutter and Oscillating Air-Force Calculations for an Airfoil in a Two-Dimensional Supersonic Flow*, NACA Rep. Nr. 846 (1946).
11. J. W. MILES, *The Aerodynamic Forces on an Oscillating Airfoil at Supersonic Speeds*, J. aeron. Sci. 14, 351–358 (1947).
12. A. R. COLLAR, *Resistance Derivatives of Flutter Theory*, Part II, R. & M. Nr. 2139 (1944).
13. N. ROTT, *Oscillating Airfoils at Mach Number 1*, J. aeron. Sci. 16, 380 (1949).
14. L. SCHWARZ, *Untersuchung einiger mit den Zylinderfunktionen nullter Ordnung verwandter Funktionen*, Luftfahrtforschung 20, 341–372 (1943).
15. C. C. LIN, E. REISSNER und H. S. TSIEN, *On Two-Dimensional Non-Steady Motion of a Slender Body in a Compressible Fluid*, J. Math. Phys. 27, 220–231 (1948).
16. W. J. DUNCAN, *The Fundamentals of Flutter*, Aircraft Eng. 17, 16–32 (1945). – Vgl. auch vom gleichen Autor: *Flutter and Stability*, J. Roy. aeron. Soc. 53, 529–549 (1949).
17. R. SAUER, *Elementare Theorie des langsam schwingenden Überschallflügels*, ZAMP 1, 248–253 (1950).
18. M. A. HEASLET, H. LOMAX und J. R. SPREITER, *Linearized Compressible Flow Theory for Sonic Flight Speeds*, NACA TN Nr. 1824 (1949).

### Summary

On the basis of energy considerations a survey is given of the possible forms of oscillations for flutter with two degrees of freedom in a plane compressible potential flow. It is found that the possible forms do not much depend on Mach Number in the whole range from 0 to  $\infty$ , with some exceptions in the neighbourhood of  $M = 1$ , where forms with only one degree of freedom (pure torsion) may occur. Conclusions are drawn for methods of preventing flutter. Limits of the reduced frequency (depending on  $M$ ) are given for the possibility of flutter in two and one degree of freedom.

Special care was given to the case  $M = 1$ , for which analytical expressions and numerical values of the derivatives are presented.

(Eingegangen: 27. 3. 1950.)

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

**Zur Multiplikation reeller Zahlen**Von WALTHER EBERL, Wien<sup>1)</sup>

Im folgenden wird das Verfahren der abgekürzten Multiplikation so erweitert, wie es für die Zwecke des Rechnens mit Rechenmaschinen erforderlich ist. Für diese Art der abgekürzten Multiplikation werden Genauigkeitsschranken abgeleitet, die diejenigen der gewöhnlichen abgekürzten Multiplikation als Spezialfall enthalten.

Dem Vernehmen nach ist diese Methode den Fachleuten der USA., die mit elektronischen Rechenmaschinen arbeiten, bereits bekannt; doch da Publikationen darüber nicht bestehen, erscheint die folgende Notiz nicht überflüssig.

Hat man zwei reelle Zahlen

$$a = \sum_m^{-\infty} a_i 10^i \quad \text{und} \quad b = \sum_n^{-\infty} b_i 10^i$$

zu multiplizieren, so geschieht das am besten nach Art der Multiplikation von Reihen:

$$a b = \sum_{m+n}^{-\infty} c_i 10^i, \quad \text{wo} \quad c_i = \sum_{j=m}^{i-n} a_j b_{i-j}$$

ist. Während die  $a_i$  und  $b_i$  Ziffern sind, also ganze Zahlen 0, 1, ..., 9, sind die  $c_i$  im allgemeinen keine Ziffern mehr.

Die praktische Durchführung dieser «geordneten» Multiplikation mit Hilfe eines Schiebezettels wird als bekannt vorausgesetzt.

Als abgekürztes Produkt  $k$ -ter Ordnung bezeichnet man die Partialsumme bis zum Glied  $c_k 10^k$  einschließlich:

$$(a b)_k = \sum_{m+n}^k c_i 10^i.$$

Im Hinblick auf die Verwendung von Rechenmaschinen ist es vorteilhaft, die Multiplikation reeller Zahlen unter einem etwas allgemeineren Gesichtspunkt zu betrachten. Sei  $X$  irgendeine positiv ganzzahlige Potenz von 10, zum Beispiel  $10^{10}$ , dann können wir unsere reellen Zahlen  $a, b$  in der Form

$$a = \sum_r^{-\infty} A_i X^i, \quad b = \sum_s^{-\infty} B_i X^i$$

schreiben, wo die  $A_i$  und  $B_i$  jetzt «Ziffern» sind, die zur Zahl  $X$  gehören, also ganze Zahlen, die den Ungleichungen

$$0 \leq A_i \leq X - 1, \quad 0 \leq B_i \leq X - 1$$

genügen.

Man kann nun bei passender Wahl von  $X$  mit einer Rechenmaschine die Ausdrücke

$$C_i = \sum_{j=r}^{i-s} A_j B_{i-j}$$

<sup>1)</sup> Technische Hochschule.

bilden und hat auf diese Weise die Möglichkeit, auch mehr als hundertstellige Zahlen ohne große Mühe miteinander zu multiplizieren.

Das in diesem allgemeineren Sinn verstandene abgekürzte Produkt  $l$ -ter Ordnung der beiden Zahlen  $a, b$  bezeichnen wir mit

$$[a b]_l = \sum_{r+s=l} C_i X^i,$$

wo  $C_i$  die oben angegebene Bedeutung hat.

Für den Unterschied zwischen dem genauen Produkt  $a b$  und dem so gewonnenen abgekürzten Produkt  $[a b]_l$  gelten zwei Abschätzungen, aus denen sich für den Fall  $X=10$  die bekannten Fehlerschranken für das gewöhnliche abgekürzte Produkt ergeben.

Der bei der Bildung des abgekürzten Produktes  $[a b]_l$  vernachlässigte Rest von  $a b$  ist gleich

$$a b - [a b]_l = (A_r B_{l-r-1} + A_{r-1} B_{l-r} + \dots + A_{l-s-1} B_s) X^{l-1} \\ + (A_r B_{l-r-2} + A_{r-1} B_{l-r-1} + \dots + A_{l-s-2} B_s) X^{l-2} + \dots$$

Der erste Klammerausdruck der rechten Seite enthält  $r + s - l + 2$  Summanden. Wir setzen  $l = p + q$  ( $p, q$  ganz) und behalten auch in den anderen Klammerausdrücken nur die Zahlen  $A_r, A_{r-1}, \dots, A_{r-s+p}$  und  $B_s, B_{s-1}, \dots, B_{s-r+q}$  bei. Alle anderen Zahlen  $A_i, B_i$  ersetzen wir zwecks Abschätzung unseres Unterschiedes durch ihren Höchstwert  $X - 1$ . Ferner setzen wir

$$A = \sum_{i=r}^{r-s+p} A_i \quad \text{und} \quad B = \sum_{j=s}^{s-r+q} B_j.$$

Dann wird

$$a b - [a b]_l \leq (A + B) (X - 1) X^{l-1} + [A + B + (X - 1)] (X - 1) X^{l-2} \\ + [A + B + 2(X - 1)] (X - 1) X^{l-3} + \dots \\ = (A + B) (X - 1) X^{l-1} \left( 1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} + \dots \right) \\ + (X - 1)^2 X^{l-2} \left( 1 + \frac{2}{X} + \frac{3}{X^2} + \dots \right) \\ = (A + B) \frac{(X - 1) X^{l-1}}{1 - (1/X)} + (X - 1)^2 X^{l-2} \frac{1 + (1/X) + (1/X^2) + \dots}{1 - (1/X)} \\ = (A + B) X^l + \frac{(X - 1)^2 X^{l-2} X^2}{(X - 1)^2} = (A + B + 1) X^l.$$

In Worten:

Bildet man aus den beiden reellen Zahlen

$$a = \sum_{i=r}^{-\infty} A_i X^i \quad \text{und} \quad b = \sum_{i=s}^{-\infty} B_i X^i$$

das abgekürzte Produkt  $l$ -ter Ordnung  $[a b]_l$ , so unterscheidet sich dieses von dem genauen Produkt  $a b$  um höchstens  $(A + B + 1) X^l$ . Dabei ist  $A$  die Summe der ersten  $s - p + 1$   $A_i$  und  $B$  die Summe der ersten  $r - q + 1$   $B_i$ . Die Zahlen  $A_{r-s+p}$  und  $B_{s-r+q}$  entsprechen einander bei Bildung der  $l$ -ten Quersumme.

Eine besondere Erwähnung verdient noch der Fall, daß einer der beiden Faktoren, etwa  $b$ , nur endlich viele von Null verschiedene Ziffern  $B_i$  hat:

$$b = \sum_s^t B_i X^i.$$

Dann behalten wir in dem abzuschätzenden Reihenrest alle diese  $B_i$ , deren Summe wir mit  $\bar{B}$  bezeichnen, bei und ersetzen die  $A_i$  ausnahmslos durch  $X - 1$ . Wir erhalten dann:

$$a b - [a b]_l \leq \bar{B} (X - 1) (X^{l-1} + X^{l-2} + \dots) = \bar{B} (X - 1) \frac{X^{l-1}}{1 - (1/X)} = \bar{B} X^l.$$

In Worten: Die Differenz zwischen dem genauen und dem abgekürzten Produkt  $l$ -ter Ordnung der beiden Zahlen

$$a = \sum_r^{-\infty} A_i X^i \quad \text{und} \quad b = \sum_s^l B_i X^i$$

ist kleiner oder höchstens gleich  $\bar{B} X^l$ , wo  $\bar{B} = \sum_s^l B_i$  ist.

Der Unterschied zwischen genauem und abgekürztem Produkt wird natürlich am kleinsten für  $X = 10$ .  $A$ ,  $B$  und  $\bar{B}$  sind dann Ziffernsummen im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Um nun beide Annehmlichkeiten, nämlich die volle Ausnützung der Rechenmaschine und die kleinen Fehlerschranken des gewöhnlichen abgekürzten Produktes zu genießen, kann man ein mit der Rechenmaschine, etwa unter Zugrundelegung zehnstelliger  $A_i$ ,  $B_i$ , berechnetes abgekürztes Produkt nachträglich durch eine kleine ergänzende Rechnung mit Schiebezettel in ein gewöhnliches abgekürztes Produkt verwandeln, dessen Fehler dann wesentlich kleiner ausfallen wird.

(Eingegangen: 9. 3. 1950.)

**Theoretische Mechanik.** Von G. HAMEL (Springer-Verlag, Berlin 1949). 796 S., 161 Abb.; DM 63.—.

Ein ganz ausgezeichnetes Buch, das sich von den üblichen Lehrbüchern der Mechanik durch seinen straffen Aufbau aus einem Minimum an Axiomen unterscheidet. Wie der Verfasser im Vorwort ausführt, war sein erstes Ziel, die ganze Mechanik als eine einheitliche Wissenschaft und nicht in der herkömmlichen Weise nach Punktmechanik und Mechanik der Kontinua getrennt erscheinen zu lassen. Zweitens sollte die auf LAGRANGE zurückgehende Methode eines einheitlichen Aufbaus aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten, dem d'Alembert'schen Prinzip und dem Lagrangeschen Befreiungsprinzip konsequent durchgeführt werden.

Es ist in der Tat erstaunlich, mit welcher Folgerichtigkeit und Eleganz aus diesen drei Prinzipien die Mechanik des Massenpunktes, des starren Körpers und des Systems mit endlich vielen Freiheitsgraden entwickelt wird, sodann diejenige der Fäden, Seile, Stäbe, Häute, Schalen sowie Platten und schließlich die Hauptsätze der dreidimensionalen Elastizitäts-, Hydro- und Aeromechanik. Besonders wertvoll ist dabei die ausführliche Diskussion der verwendeten Voraussetzungen, die dem Leser durch Gegenbeispiele nahegebracht werden. Daß im ersten Teil «Aufbau der theoretischen Mechanik», mit seinen 525 Seiten für die meisten Gebiete nur die Grundlagen dargestellt werden konnten, ist selbstverständlich. Beim starren Körper (Kreisel) und beim Punkthaufen (Mehr-



körperproblem) stößt der Verfasser indessen erheblich weiter vor, und zudem gibt er eine umfassende Darstellung der unter der Bezeichnung «analytische Mechanik» bekannten Methoden.

Der zweite Teil «Aufgaben und Probleme der theoretischen Mechanik» umfaßt auf 263 Seiten eine reichhaltige Problemsammlung, vom Verfasser im Vorwort mit der Bemerkung angekündigt: «Sicher ist Denken wichtiger als Rechnen. Aber rechnen muß man auch können, und man lernt es nicht, wenn man daran vorbeigeht. Nichts gefährlicher als die Meinung, ein Problem sei gelöst, wenn man die Methode kennt, es zu lösen.»

Die Lektüre dieses Werkes ist jedermann wärmstens zu empfehlen, der mit den Elementen vertraut ist. Einmal vermittelt es in selten klarer Weise den Anschluß an die anspruchsvolleren Werke. Darüber hinaus ist es aber wie kein zweites dazu angetan, Begriffe und Sätze zu klären, die in den elementaren Lehrbüchern – teils aus guten Gründen, oft aber ohne Notwendigkeit – mangelhaft behandelt werden.

Dem zuletzt genannten Zwecke dient vor allem das einleitende Kapitel, das im wesentlichen eine Axiomatik enthält. Die Wahl der Axiome ist dabei naturgemäß bis zu einem gewissen Grade willkürlich; immerhin scheint aber dem Referenten das Reaktionsprinzip zu kurz zu kommen, wenn es nicht als Axiom formuliert, sondern nur ab und zu beiläufig postuliert und gelegentlich gar als Folge anderer Prinzipien dargestellt wird. Wenn es etwa auf S. 25 und 511 in einem Sonderfall auf das Newtonsche Gravitationsgesetz zurückgeführt werden kann, das zuvor für den ruhenden Zentralkörper aus den Keplerschen Gesetzen erschlossen wird, so spricht dies nur für das Gravitationsgesetz in seiner Verallgemeinerung auf beliebig bewegte Massen, nicht aber gegen das Reaktionsprinzip als allgemeines Axiom. Und wenn das Reaktionsprinzip in einem einzigen Falle (S. 83) scheinbar nicht gilt, so liegt dies nur an seiner unzulässigen Erweiterung unter Ausschaltung der zwischen zwei Spiegeln reflektierten Photonen.

Beiläufig sei noch erwähnt, daß in Aufgabe 76 (S. 609) die Tischkante durch eine Öffnung in der Platte ersetzt werden sollte, um die betrachtete Bewegung mit dem Impulssatz in horizontaler Richtung zu bringen. *H. Ziegler.*

**Darstellende Geometrie.** Von F. REUTTER (Verlag G. Braun, Karlsruhe 1947 und 1949). Bd. I: 140 S., 144 Abb.; DM 7.50, — Bd. II: 216 S., 210 Abb.; DM 12.50.

Das vorliegende Werk ist aus einer autographierten Vorlesung hervorgegangen und will in erster Linie mithelfen, die Schwierigkeiten der Nachkriegszeit auf dem deutschen Büchermarkt zu überbrücken. Der Aufbau dieses Lehrkurses weicht etwas vom Rahmen der bekannten Lehrbücher über darstellende Geometrie ab; da sich der Verfasser vorwiegend an Ingenieure und Architekten wendet, läßt er den Anwendungen in Technik und Architektur etwas breiteren Raum.

*Band I:* Orthogonale Zweifafelprojektion. In einem einleitenden Kapitel gibt der Verfasser zunächst einen Überblick über die verschiedenen Projektionsarten und ihre Invarianten. Nach diesen Vorbereitungen wird dann in der üblichen Weise das Verfahren der orthogonalen Zweifafelprojektion aufgebaut. Besondere Kapitel sind der Darstellung von Rotations- und Schraubenflächen sowie den Durchdringungen gewidmet. Auf S. 66 findet sich im Text eine kleine Unklarheit; im Zusammenhang mit dem ebenen Schnitt eines allgemeinen Kreiskegels ist dort von den Dandelinschen Kugeln die Rede, welche ja nur beim geraden Kreiskegel vorhanden sind. Die Definition der Ordnung einer Kurve auf S. 92 ist auch für ein Lehrbuch der darstellenden Geometrie zu unpräzise. Darnach heißt beispiels-



weise eine ebene Kurve von 2. Ordnung, wenn sie mit einer Geraden höchstens zwei Schnittpunkte gemeinsam hat.

*Band II:* Kotierte Normalprojektion, orthogonale Axonometrie und Zentralperspektive. Im ersten Teil gibt der Verfasser einen Überblick über die kotierte Normalprojektion und ihre Anwendungen in Kartographie und Bauwesen. Bei der Behandlung der orthogonalen Axonometrie im zweiten Teil wird der bekannte Weg über das Spurendreieck gewählt. Der dritte Teil ist der Zentralperspektive gewidmet. Die beiden Methoden der freien und der gebundenen Perspektive werden dabei ausführlich beschrieben. Die zahlreichen Figuren erlauben dem Leser ein müheloses Eindringen in die Konstruktionsverfahren der Perspektive.

Didaktisch wertvoll ist der Anhang des zweiten Bändchens, in welchem der Verfasser an Hand einiger Beispiele eine Gegenüberstellung der verschiedenen Abbildungsverfahren der darstellenden Geometrie versucht. *M. Jeger*

**Electromagnetic Fields, Theory and Application, Vol. I: *Mapping of Fields*.** By ERNST WEBER (John Wiley & Sons, New York 1950). 590 pp.; \$10.—.

In the preface to this book, the first of two volumes on Electromagnetic Fields, Professor WEBER explains that the division of material has been made on the basis of assigning to Volume I, all static field problems, and to Volume II the treatment of dynamic fields.

Judging from the scope and arrangement of the first volume, this appears to be a very satisfactory method of division for a work designed primarily for graduate students. The avowed purpose of the book is to give, for field distributions derived from potential functions, "a rather comprehensive survey of the methods of analysis and of results obtained with them", and it can be said immediately that this object has, in very substantial measure, been achieved. Individual preference or prejudice will naturally influence opinion as to the appropriate variation of emphasis on the sub-divisions of this very wide subject. The author's bias in the matter is possibly illustrated by the fact that some 250 pages out of a total of under 600 are devoted to the study of two-dimensional and three-dimensional analytic solutions. This represents an exceptionally thorough treatment of the more difficult potential problems susceptible of solution by mathematical analysis. It should however be emphasized that the book has clearly not been written exclusively for the advanced specialist. Under the title *Fields of Simple Geometries* are developed solutions to the electric and magnetic field problems ordinarily dealt with in general text-books. The method of images also receives unusually detailed attention. The treatment is clear and concise and is characterized by the interjection of explanatory or cautionary notes on many points on which misconception or ambiguity commonly exist and by comments as to the scope or special value of the original papers or treatises to which reference is made. This last is a most valuable feature of the book; references are given on a very extensive scale and are judiciously chosen and assessed.

Experimental and graphical methods of field plotting and numerical methods are discussed, but in less detail, and in the reviewer's opinion constitute a rather less satisfactory section. It is, of course, true that only a brief outline of these individual topics is possible within the compass of a book reviewing the whole field but dealing mainly with analysis. Having regard, however, to the important part played, for example, by relaxation methods in the practical computation of field distributions, a more extensive development of this subject, in basic principle, might have been given. In this section and in that on experimental mapping

methods the references to the literature are perhaps a little less complete than in other portions of the book.

There is an excellent selection of problems associated with each chapter. Following the main text there are six appendices, two dealing with symbols and units, and containing a table of conversion factors from rationalized M. K. S. units in terms of which the book is written, three dealing with basic mathematical fundamentals—Vector Analysis, Bessel Functions, and Legendre Functions—and one giving a general bibliography.

The standard of production of the book is in every way excellent. It is a valuable new work of reference on field problems.

*James Greig*

**Ausgleichsrechnung.** Von V. HAPPACH (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1950). 104 S., 26 Abb.; \$1.50.

Das kleine Buch gliedert sich in zwei Teile: A. Fehlertheorie, Seite 6–39; B. Fehlerausgleichsrechnung, Seite 40–98.

Der erste Teil gibt eine einfache Fehlertheorie. Die vorzüglich ausgewählten Beispiele bieten eine ausgezeichnete Wegleitung, und sie werden auch den mit der Methode noch wenig vertrauten Wissenschaftler, der mit gemessenen Größen zu tun hat, dazu veranlassen, die Fehlertheorie anzuwenden.

Der zweite Teil, der die Hauptformen der Ausgleichsrechnung vorführt, ist elementar behandelt. Nach der Ansicht des Referenten würde das Buch beträchtlich gewinnen, wenn es von der Differenzierung einer Funktion von Funktionen Gebrauch machen würde. Dadurch würde zum Beispiel auf Seite 42 die Herleitung der Normalgleichungen aus der Bedingung  $[vv] = \text{Minimum}$  sehr viel eleganter ausfallen. Ferner wäre es zu empfehlen, in aller Kürze die Bestimmung der Gewichte der Unbekannten mit Hilfe der sogenannten Gewichtskoeffizienten vorzuführen. Die im Buche vorgeführte Methode, die Gewichtskoeffizienten der Unbekannten durch Umstellen der Unbekannten und mehrmalige Neuauflösung der Normalgleichungen zu bestimmen, bedeutet eine beträchtliche Mehrarbeit. Die nötige Theorie könnte auf wenigen Seiten untergebracht werden. Sie würde dann auch erlauben, den mittleren Fehler einer Funktion der Unbekannten oder der Meßgrößen zu bestimmen. Ein Sachregister würde die Verwendung als Nachschlagewerk sehr erleichtern.

Von diesen Bemerkungen abgesehen, bietet das vorliegende Buch auf knappem Raum eine korrekte Einführung in die Ausgleichsrechnung und vor allem in die Fehlertheorie. Es kann daher vor allem Physikern warm empfohlen werden.

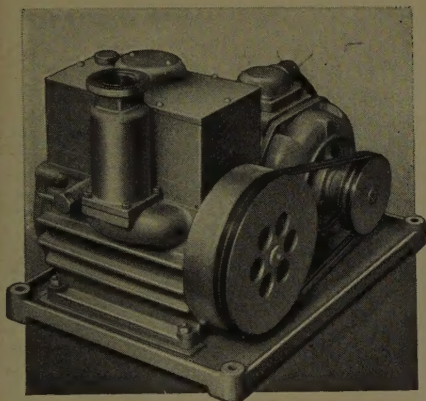
*F. Baeschlin*

**Vektoranalysis.** Von S. VALENTINER (Walter de Gruyter, Berlin 1950). 138 S., 19 Abb.; DM 2.40.

Es ist sehr zu begrüßen, daß die seit einiger Zeit vergriffenen Götschen-Bändchen über Mathematik nun nach und nach wieder neu gedruckt werden.

Die vorliegende 7. Auflage des Bändchens über Vektoranalysis weicht nicht wesentlich von den vorhergehenden ab. Es vermittelt nach einer Einführung in die Vektoralgebra die Grundlagen der Vektoranalysis (Rechnen mit dem  $\nabla$ -Operator, Integralsätze von GAUSS, STOKES und GREEN) und bringt dazu einige ausgewählte Anwendungen auf die Potentialtheorie, die Hydrodynamik und die Elektrodynamik. Die zweckmäßig zusammengestellte Formelsammlung der Vektoranalysis im Anhang wird dem Leser sehr willkommen sein.

*M. Jeger*



## Gerätebauanstalt Balzers

### Zweistufige rotierende Vakuumpumpen

Saugleistungen von 5 bis 180 m<sup>3</sup> pro Stunde. Selbsttätige Ölregeneration, einstellbares Gas-spülventil zur direkten Absaugung kondensierbarer Gase und gesättigter Dämpfe, zwangsläufige Luftkühlung. Kleiner Ölinhalt. Endvakuum garantiert besser als  $2 \times 10^{-4}$  mm Hg

Verkaufsorganisation

## Trüb, Täuber & Co. AG., Zürich

Fabrik elektrischer Meßinstrumente und wissenschaftlicher Apparate

*Demnächst erscheint:*

A. OSTROWSKI

Professor an der Universität Basel

## Vorlesungen über Differential und Integralrechnung

*Band II: Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen*

484 Seiten mit 55 Fig. Ganzleinen Fr. 67.—, brosch. Fr. 63.— (1950)

**Inhalt:** Unendliche Mengen – Funktionen auf Mengen – Unendliche Folgen und Reihen – Ergänzungen zur Differentialrechnung – Anwendungen der Differentialrechnung auf die Analysis – Numerische Rechenmethoden – Bogenlänge – Ebene Kurven – Raumkurven und Flächen.

In erster Linie enthält der zweite Band eine vertiefte Behandlung der grundlegenden Begriffe der Analysis, ferner eine verhältnismäßig ausführliche Behandlung der numerischen Rechenmethoden, die sonst etwas stiefmütterlich erledigt werden. Auch in diesem Band findet man eine große Anzahl von neuen Aufgaben, die sich sowohl auf die praktischen als auch auf die theoretischen Teile des Lehrstoffes beziehen.

Der dritte und letzte Band befindet sich in Vorbereitung.

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL



## Werke der reinen und angewandten Mathematik und Physik

# Matematik

- |   |  |
|---|--|
| BIEBERBACH, L.: Theorie der geometrischen Konstruktionen, erscheint 1951  |  |
| CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie in zwei Bänden  | Band I geb. Fr. 36.—<br>Band II geb. Fr. 24.50 |
| CARATHÉODORY, C.: Maß und Integral und ihre Algebraisierung, erscheint 1951.  |  |
| DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Band I: Die theoretischen Grundlagen der Laplace-Transformation . . . . . geb. Fr. 78.— |  |
| FINSLER, P.: Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen . . . . . geb. Fr. 14.80  |  |
| FUETER, R.: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes . . . . . geb. Fr. 22.50   |  |
| HURWITZ, A.: Mathematische Werke, 2 Bände . . . . . geb. je Fr. 44.—  |  |
| LINDER, A.: Statistische Methoden, 2. Auflage 1951 . . . . . geb. Fr. 18.50   |  |
| LOCHER-ERNST, L.: Differential- und Integralrechnung im Hinblick auf ihre Anwendung . . . . . geb. Fr. 48.—                               |  |
| OSTROWSKI, A.: Vorlesungen über Diff.- u. Integralrechng., Band I   | geb. Fr. 47.50                                 |
|   | Band II geb. Fr. 67.—                          |
| SCHLÄFLI, L.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band I . . . . . geb. Fr. 54.—   |  |
| STIEFEL, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie . . . . . geb. Fr. 28.50  |  |
| VOELKER, D., DOETSCH, G.: Die zweidimensionale Laplace-Transf. . . . . geb. Fr. 43.—  |  |
| ZWINGGI, E.: Versicherungsmathematik . . . . . geb. Fr. 27.—  |  |

*Physik und Astronomie*

- |  |                |
|--|----------------|
| GOMBÁS, P.: Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik . . . . .  | geb. Fr. 29.50 |
| NIETHAMMER, TH.: Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung. . . . .  | geb. Fr. 32.—  |
| VON DER PAHLEN, E.: Einführung in die Dynamik von Sternsystemen . . . . .  | geb. Fr. 36.—  |
| WALDMEIER, M.: Einführung in die Astrophysik . . . . .   | geb. Fr. 47.50 |
| WALDMEIER, M.: Tabellen zur heliographischen Ortsbestimmung . . . . .  | geb. Fr. 14.—  |
| WALDMEIER, M.: Die Sonnenkorona, Band I, erscheint 1950 . . . . .  | geb. Fr. 28.60 |
| Kongreßbericht der Internationalen Konferenz über Kernphysik und theoretische Physik, Basel 1949. 248 S. mit vielen Illustrationen. Broschiert . . . . . | Fr. 16.—       |

## Ingenieurwissenschaften

- |  |                |
|--|----------------|
| BODEA, E.: Giorgis rationales MKS-Maßsystem. Broschiert . . . . .  | Fr. 24.50      |
| BRÄNDLI, H.: Theorie des Mehrfachschusses . . . . .  | geb. Fr. 28.50 |
| JAEGER, Ch.: Technische Hydraulik . . . . .  | geb. Fr. 48.50 |
| KUHLMANN, K.: Theoretische Elektrotechnik. Band II: Grundzüge der Theorie der Wechselströme und des einphasigen Transformators . . . . . | geb. Fr. 26.50 |
| Band III: Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen. In Vorbereitung  |                |
| MEISSNER, E., und ZIEGLER, H.: Mechanik. Band I: Statik der starren, flüssigen und elastischen Körper . . . . .                          | geb. Fr. 36.—  |
| Band II: Dynamik der starren Körper . . . . .  | geb. Fr. 32.50 |
| Band III: Dynamik der Systeme, erscheint 1951  |                |
| MICHAEL, W.: Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene  | geb. Fr. 11.50 |
| SÄNGER, R.: Ballistische Störungstheorie . . . . .   | geb. Fr. 14.50 |
| STÜSSI, R.: Vorlesungen über Baustatik, Band I . . . . .   | geb. Fr. 38.50 |
| RUSTERHOLZ, A.: Elektronenoptik, Band I: Grundzüge der theoretischen Elektronenoptik . . . . .   | geb. Fr. 29.—  |

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL



*Clichés für Wissenschaftliche Arbeiten*  
*unsere Spezialität*

*Clichés*

**STEINER+CO**

**BASEL**

**SCHÜTZENMATTSTR. 31**



## Neuerscheinungen November 1950

---

### Die zweidimensionale Laplace-Transformation

Eine Einführung in ihre Anwendung zur Lösung von Randwertproblemen nebst Tabellen von Korrespondenzen

von

DIETRICH VOELKER  
Dr. rer. nat. in Heidelberg

GUSTAV DOETSCH  
Professor in Freiburg i. Br.

260 Seiten mit 17 Fig. Ganzleinen Fr. 43.-, brosch. Fr. 39.-

*Inhalt:* I. Teil, von G. Doetsch und D. Voelker. Die grundlegenden Eigenschaften der  $\mathfrak{L}^2$ -Transformation – Partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen und Systeme von solchen – Partielle Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Variablen – Funktionalrelationen und Reihenentwicklungen.

II. Teil, von D. Voelker. Tabellen von Korrespondenzen von allgemeinen Operationen und von speziellen Funktionen – Funktionsliste.

Das Buch, das zum weitaus größten Teil aus bisher unpubliziertem Material besteht, bringt zum erstenmal eine zusammenfassende Darstellung der zweidimensionalen Laplace-Transformationen und wendet sie im I. Teil auf eine Fülle von Problemen an, die für Physik und Technik wichtig sind, während der II. Teil etwa 400 Abbilder von allgemeinen Operationen und 370 Transformationen von speziellen Funktionen enthält.

### Handbuch der Laplace-Transformation

von GUSTAV DOETSCH, Professor in Freiburg i. Br.

Erster Band:

*Theorie der Laplace-Transformation*

581 Seiten mit 40 Fig. Ganzleinen Fr. 78.-, brosch. Fr. 74.-

*Inhalt:* I. Teil: Allgemeine analytische und funktionentheoretische Eigenschaften der Laplace-Transformation.

II. Teil: Die komplexe Umkehrformel – Das Partialintegral der Laplace-Transformation – Die Parsevalsche Gleichung – Darstellungsproblem – Weitere Umkehrformeln.

III. Teil: Die Cesàroschen arithmetischen Mittel der Laplace-Transformation.

IV. Teil: Die Laplace-Transformation der ganzen Funktionen vom Exponentialtypus – Die zweiseitige Laplace-Transformation von analytischen Funktionen – Die Laplace-Transformation der Funktionen der Klasse  $L^2$ .

V. Teil: Abelsche und Taubersche Sätze für die Laplace-Transformation und für das komplexe Umkehrintegral.

Dieses Werk stellt das bisher vorliegende Material über die Laplace-Transformation, vermehrt um zahlreiche bisher nicht publizierte Ergebnisse des Verfassers, in einer Weise dar, die sowohl die Bedürfnisse des reinen Mathematikers wie die des Ingenieurs berücksichtigt. Der zweite Band wird die Anwendungen behandeln.

---

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL